This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

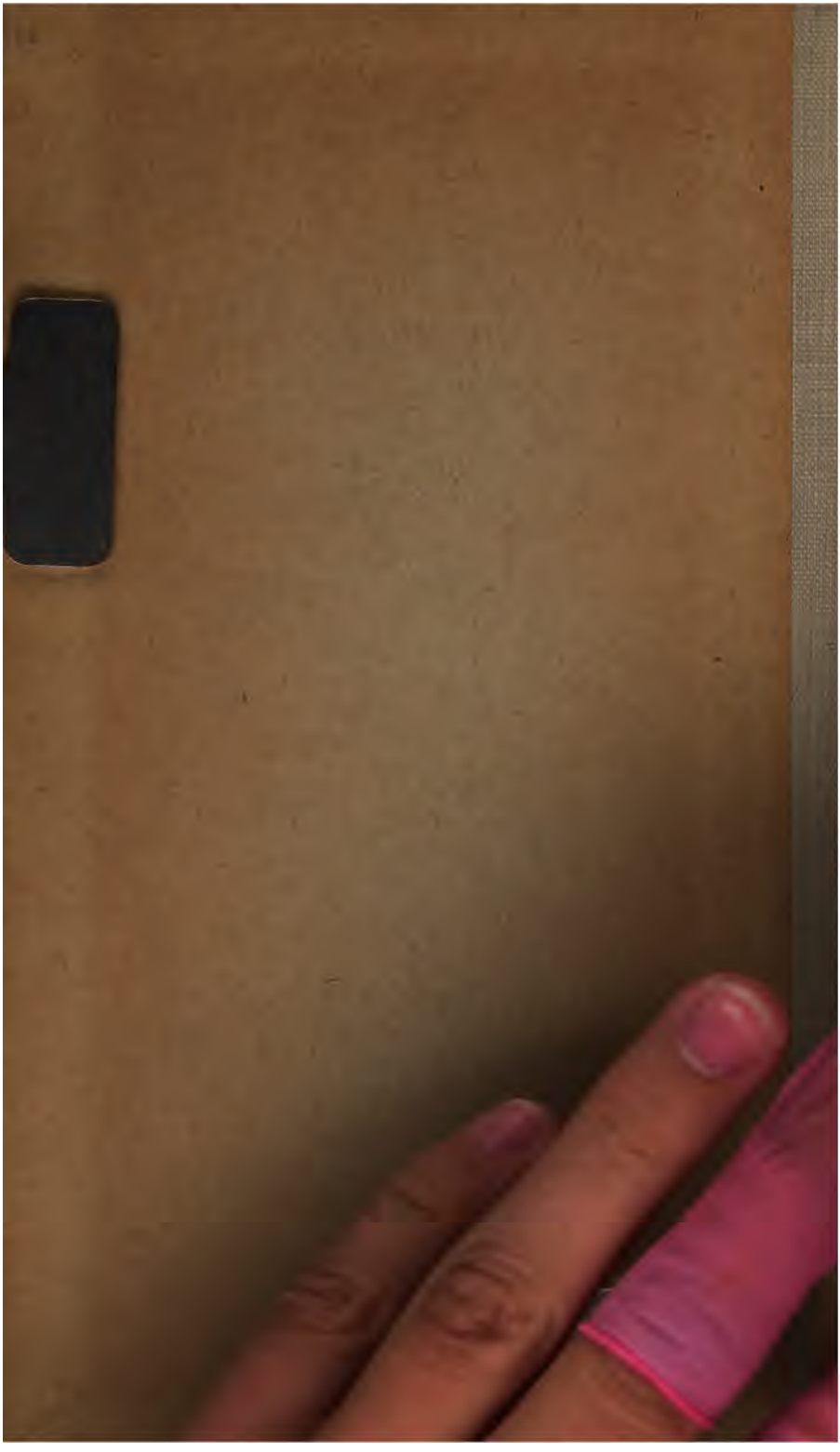
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06910546 2



194

Abreau
C

SUPPLÉMENT

À LA TRADUCTION

DE

LA GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE,

DE M.r PEYRARD,

SUPPLÉMENT

À LA TRADUCTION

DE

LA GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE,

DE M. DE PEYRARD.

Geometry
I. C.

SUPPLÉMENT

À LA TRADUCTION

DE

LA GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE,

DE M.r PEYRARD,

PUBLIÉE EN 1804,

ET À LA GÉOMÉTRIE

DE M.r LEGENDRE;

SUIVI D'UN ESSAI SUR LA VRAIE THÉORIE DES PARALLÈLES.

PAR J. M. D'ABREU.

A AGEN,
DE L'IMPRIMERIE DE RAYMOND NOUBEL.

Et se vend, A PARIS,
Chez COURCIER, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins, n.o 71;

Et A BORDEAUX,
Chez BERGERET, Libraire, rue de l'Intendance.

Juillet 1809.

SG

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1913 L

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
103753A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1913 L

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

AVANT-PROPOS.

« Peu d'ouvrages, disent MM. de Lagrange et » Delambre, ont été aussi souvent traduits, com- » mentés et reproduits, que les Elémens d'Euclide ; » mais il n'est pas d'auteur avec qui ses traducteurs » aient pris d'aussi étranges libertés. Sous prétexte de » donner aux démonstrations plus de clarté et de » simplicité, il n'est presque pas de propositions dont » ils n'aient changé ou modifié les preuves. Pour ne » parler que des traducteurs français, il suffit de jeter » les yeux sur l'Euclide de Dechalles, réimprimé » plusieurs fois successivement par Ozanam et Au- » dierne, pour voir que ces éditeurs n'ont presque » rien respecté dans l'auteur original, si ce n'est » l'ordre et l'énoncé des théorêmes. Mais, malgré » tous leurs soins et leurs prétentions, ils n'ont pas » fait oublier le véritable Euclide ; on trouve même » encore quelques savans qui, soit avec raison, soit » par un goût trop exclusif pour les méthodes des » anciens, prétendent que malgré les talens et les » succès des auteurs modernes, les Elémens d'Euclide » sont, à quelques endroits près, le meilleur ouvrage » que nous ayions en ce genre. Sans prendre aucun » parti sur cette question, on peut conclure au » moins de leur opinion, que le citoyen Peyrard a fait » une chose utile en traduisant fidèlement un ouvrage

» dont nous n'avons pas eu de traduction exacte depuis » plus de deux cents ans, et dont les bonnes éditions, » soit grecques, soit latines, sont assez rares, et à la » portée de peu de savans, sans parler des difficultés » des deux langues, qui diminuent encore assez con- » sidérablement le nombre de lecteurs, etc., etc. » (Voyez le rapport de MM. Lagrange et Delambre, en tête de la traduction de M. Peyrard.) Mais je ne sache pas qu'aucun de ces traducteurs des Elémens d'Euclide, qui ont pris avec l'auteur d'aussi étranges libertés, se soient jamais avisés de supprimer le Vme livre tout entier, sans substituer du moins quelques investigations numériques à la place des démonstrations générales du texte : voilà cependant ce que M. Peyrard a fait, et ce que tout le monde peut voir dans sa traduction de la Géométrie d'Euclide. L'auteur passe du IVme au VIme livre sans dire un seul mot du Vme, ni dans ses notes, ni dans ses supplémens. J'ignore le succès que sa traduction peut avoir eu jusqu'à ce jour ; car, quoique imprimée en 1804, ce n'est que depuis peu que le hasard l'a faite tomber entre mes mains : mais il me paroît que la Géométrie d'Euclide, sans Vme livre, est aussi inutile aux commençans qu'aux professeurs : les uns ne sauroient l'entendre que jusqu'au IVme livre inclusivement, tandis que les autres ne voudront certainement pas d'un ouvrage tronqué. A Dieu ne plaise que je veuille déprécier une traduction que MM. Delambre et de Lagrange ont approuvée : je pense au contraire que rien n'est plus facile que de lui faire atteindre le but d'utilité dont le texte est susceptible. Que l'auteur daigne y ajouter, soit la traduction litté-

rale du V.me livre, soit l'équivalent de la théorie qu'il renferme, et que j'ai l'honneur d'offrir ici à ceux qui voudront profiter de l'édition actuelle de son ouvrage, et personne ne pourra lui contester le titre de fidèle traducteur autant que de zélé commentateur d'Euclide. Ce n'est que dans cet esprit, et parce que l'ouvrage de M. Peyrard me paroît très-digne d'être achevé, que je m'en occupe dans ce moment. J'ose espérer que l'auteur sera le premier à convenir de la justice de cette réclamation.

Que les auteurs modernes aient élagué de la géométrie la théorie des proportions selon Euclide, c'est une conséquence naturelle du plan qu'ils ont adopté de faire de l'arithmétique la base de leurs Traités élémentaires. Que M. Legendre lui-même, malgré le devoir qu'il s'est imposé d'adopter la méthode d'Euclide et d'Archimède, renvoie néanmoins dans le III.e livre de ses Elémens de géométrie « *aux traités ordinaires* d'arithmétique et d'algèbre ; » cela s'entend : le savant auteur n'a eu en vue « que de suivre de près ces illus-» tres modèles, et de perfectionner quelques points » des Elémens qu'ils ont laissés imparfaits » : (voyez la préf. de la Géom. de M. Legendre). Que l'on n'attache plus aucune espèce d'importance à une traduction complète de tous les livres d'Euclide ; que pas une société littéraire ne s'y intéresse en faveur de ceux qui n'entendent ni le grec ni le latin ; cela est encore assez facile à expliquer, puisque l'entreprise n'offre pas un dédommagement proportionné aux frais et à la peine qu'elle auroit coûté. Mais borner une traduction littérale de la Géométrie d'Euclide au seul usage d'un

petit nombre de commençans instruits d'avance dans les principes de l'arithmétique et de l'algèbre, n'est-ce pas méconnoître la principale utilité de l'original ? n'est-ce pas ôter à la traduction cette indépendance de toute méthode moderne qui caractérise le texte, et qui le rend intelligible à ceux mêmes qui n'auroient jamais entendu parler ni d'arithmétique ni d'algèbre ?

Les Elémens d'Euclide ne présupposent d'autres idées de nombres que celles qui répondent à ces mots : *un*, *plus un*, *plus un*, etc., ou à leurs synonymes ; et ce n'est que par cette généralité jointe à la simplicité qui en est la suite, que la Géométrie d'Euclide présente le moyen le plus sûr dont un instituteur, même le moins habile, puisse se servir, soit pour initier ses élèves à la méditation en tout genre, soit pour les préparer à l'étude des mathématiques, en les préservant de bonne heure de la séduction du paralogisme et de la contagion du verbiage. Voilà ce que M. Peyrard semble avoir perdu de vue, en supprimant d'une part le Vme livre, et en substituant de l'autre, quoique tacitement, un ou deux volumes d'arithmétique et d'algèbre. Mais il est impossible de croire que M. Peyrard ait pu perdre de vue ce qui ne sauroit échapper à l'attention la plus médiocre. On ne peut donc s'empêcher de lui imputer l'ambition d'assimiler la Géométrie d'Euclide à celle de M. Legendre, et de procurer ainsi à son travail un débit plus assuré. En effet, tout le monde convient que la Géométrie d'Euclide, à ne la considérer que comme partie intégrante d'un cours complet de mathématiques, est aussi insuffisante qu'elle est disproportionnée à la méthode actuelle

d'enseignement public ; et il seroit sans doute à désirer que l'on pût remédier à cet inconvénient, sans toutefois porter atteinte à la force de l'enchaînement, ni à la solidité de la démonstration. Mais est-ce dans une traduction littérale qu'il falloit tenter une entreprise où tant d'autres ont échoué, même dans des traductions libres ? Est-ce en retranchant d'une part le calcul d'Euclide, et en substituant de l'autre des calculs modernes, qui ne sont que des branches de ce tronc commun, que l'on parviendra à remettre en vogue l'étude des anciens ? N'est-ce pas au contraire par des substitutions et des réformes semblables que la plupart des glossateurs d'Euclide ont mérité l'oubli où ils sont tombés ?

« En vain, dit M. Montucla, divers géomètres, à » qui l'arrangement d'Euclide a déplu, ont tâché de » le réformer, sans porter atteinte à la force des » démonstrations. Leurs efforts impuissans ont fait » voir combien il est difficile de substituer à la chaîne » formée par l'ancien géomètre, une chaîne aussi » ferme et aussi solide. Tel étoit le sentiment de l'il- » lustre M. Leibnitz ; et M. Wolf, qui nous l'apprend, » convient d'avoir tenté inutilement d'arranger les » vérités géométriques dans un ordre différent, sans » supposer des choses qui n'étoient point encore dé- » montrées, ou sans se relâcher sur la solidité de la » démonstration. » (Voyez la préface de la traduction de M. Peyrard).

Cependant personne ne devoit savoir mieux que ces illustres savans, qu'il y a des endroits foibles dans les élémens d'Euclide ; et que le Vme livre, par exemple,

SUPPLÉMENT

À LA TRADUCTION

DE

LA GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE,

DE M.r PEYRARD,

on puisse en dire autant? On répondra peut-être, qu'un pareil volume seroit infiniment plus difficile à faire aujourd'hui, qu'il ne le fut du temps d'Euclide ; mais raison de plus pour méditer sans cesse le modèle qu'il nous a laissé, jusqu'à ce que l'on parvienne à en produire un autre, qui approche également de la perfection par rapport à l'état actuel de la science. Voilà, sans doute, un sujet digne d'attention, auquel le plus grand nombre de géomètres n'a peut-être jamais pensé, pour cela même que les bonnes éditions d'Euclide sont si rares. On ne sauroit donc trop engager M. Peyrard à achever la sienne : jamais ouvrage ne fut plus nécessaire, je ne dis pas seulement, à un très-grand nombre de géomètres, mais aussi à tout faiseur d'Elémens, qui, pour essayer sa vocation au métier d'auteur, croit que rien n'est si naturel que de débuter par un livre élémentaire.

Mais, revenant à la lacune en question, on trouvera peut-être singulier que j'y attache une si grande importance, tandis que MM. de Lagrange et Delambre n'en ont fait aucune mention dans leur rapport. En effet, il est permis de conclure de leur silence sur ce point, que le retranchement du Vme livre leur a paru sinon assez fondé, du moins trop insignifiant pour en faire un éloge ou un reproche à M. Peyrard. Pour moi, je pense tout bonnement, qu'ils n'ont pas eu le loisir d'y faire la moindre attention : *bonus quandoque dormitat Homerus.* Mais, ce qui ne souffre aucun doute, c'est que les deux illustres censeurs, sans prendre aucun parti sur la question de savoir « si c'est » avec raison, ou seulement par un goût trop exclusif

....

» pour les méthodes des anciens, que quelques savans » regardent encore les Elémens d'Euclide comme le » meilleur ouvrage que nous ayons en ce genre », ont laissé à l'amour-propre du lecteur la satisfaction d'en juger lui-même, selon sa fantaisie; ce qui auroit dû servir d'exemple à M. Peyrard, pour ne point trancher la question en supprimant tout juste la pièce la moins connue, ainsi que la plus essentielle du procès.

On avouera peut-être, que l'on n'a pas songé à des lecteurs assez désœuvrés pour s'amuser encore à lire la théorie des proportions d'Euclide; et que, quand même on y auroit pensé, ce n'est pas pour faire plaisir à des gens d'un si mauvais goût, que l'on se seroit sacrifié à la peine, si inutile, de traduire le Vme livre, sans parler du surplus de frais d'impression, que l'on s'est épargné en le supprimant. A la vérité, ce motif paroît assez séduisant, au premier coup-d'œil; mais, en y regardant de plus près, on le trouve faux. Supposons, par exemple, de jeunes écoliers d'un talent plus qu'ordinaire, et assez curieux pour pouvoir comparer les longueurs de quelques démonstrations anciennes à la trop grande brièveté de certaines démonstrations modernes; supposons encore des instituteurs assez au-dessus de la routine pour savoir profiter de ces heureuses rencontres, et cependant trop dépourvus de moyens pour se procurer d'autres éditions d'Euclide que celle de M. Peyrard : voilà, j'imagine, des lecteurs dont M. Peyrard se seroit fait un devoir de seconder le zèle, si jamais ils s'étoient présentés à sa pensée : je croirois même que ce sont là les seuls auxquels il eût

dû penser ; car on aura beau rajeunir les ouvrages des anciens, ce ne seront jamais des élèves vulgaires, ni des instituteurs routiniers, qui en épuiseront les éditions.

Mais la théorie des nombres n'est-elle pas la base des sciences mathématiques ? Et, ne faut-il pas ignorer jusqu'aux premières notions de l'analyse moderne, pour revenir encore sur la méthode surannée du V.me livre, que l'arithmétique et l'algèbre rendent parfaitement superflue ?

C'est une chose assez digne de remarque, que l'accord des auteurs modernes sur ce point : on diroit que c'est sur-tout à cet égard, qu'ils se sont donné le mot pour ne plus revenir sur les traces d'Euclide. Il est cependant possible que l'unanimité ne soit ici qu'une routine contraire à la droite raison. La théorie des proportions, selon Euclide, ne roule que sur l'idée de grandeur indépendamment de toute figure, de toute expression spécifique ; l'arithmétique, au contraire, présuppose cette base dans toute sa simplicité, et embrasse en outre les principes de convention et les rapports d'expression qui en font la base particulière ; la géométrie considère encore les grandeurs sous le rapport de leurs figures et de leurs positions : d'où il s'ensuit que la théorie du V.me livre est la base de tout calcul ; que ceux qui en ont dissous le système, et qui, les premiers, en ont inséré les fragmens tantôt dans l'arithmétique, tantôt dans l'algèbre, ou dans la géométrie, se sont trompés grossièrement. Ils ont oublié ce qu'il y a de plus élémentaire en logique : « Commencez par les objets les plus simples et les plus

» aisés à connoître, pour monter, peu-à-peu, » comme par degrés, jusqu'à la connoissance des » plus composés. » Principe de Descartes, qu'Euclide avoit su pratiquer si long-temps avant lui. Ils n'ont pas songé à la règle, non moins connue : *Divisez le travail.* Car, ou ils démontrent les propositions du V.me livre dans les endroits où il est indispensable d'y recourir ; ou ils font seulement semblant de les démontrer. Dans le premier cas, ils compliquent les premières difficultés de la science, au lieu de les applanir : ils sont obligés de revenir quelquefois sur les mêmes démonstrations ; ce qui est encore contraire au principe : *Évitez les doubles emplois.* Dans le second, ils gâtent l'esprit des commençans, en leur apprenant à profaner le nom de démonstration précisément à l'époque où l'on devroit s'attacher à leur en donner les idées les plus exactes. Ils croient accélérer leur première instruction, et ne font que la retarder, en leur faisant apprendre presque par cœur, dans beaucoup de pages, ce qui, expliqué en temps et lieu, n'eût été que l'objet de quelques lignes. On dira que que j'exagère. Eh bien ! proposez à un jeune étudiant, au bout de trois ou quatre mois d'étude d'arithmétique, les questions suivantes :

1.re. 100 est dix fois plus grand que 10 ; 10 dix fois plus grand que 1 : on demande combien de fois 100 est plus grand que 1 ? Il répondra : *cent fois.*

2.me. A est six fois plus grand que B ; B dix fois plus grand que C : on demande combien de fois A est plus grand que C ? S'il n'est pas averti d'avance, il répondra, avec la même prestesse ; *seize fois.*

3.me. A est huit fois plus grand que B; C six fois plus grand que D : on demande combien de fois A+C est plus grand que B+D? Il répondra infailliblement : *quatorze fois*. Et ainsi de suite. Tant il est vrai que les réformes trop absolues font toujours perdre d'un côté plus qu'on ne gagne de l'autre.

Mais le V.me livre est aussi long qu'incorrect et fastidieux ? D'accord. Aussi je ne prétends pas dire qu'on doive l'enseigner tel qu'il est, jusqu'à la fin des siècles : j'affirme seulement qu'avant d'y renoncer, on auroit dû s'assurer par expérience, et à force de l'étudier, s'il ne seroit pas possible de le corriger et de le rendre aussi simple et aussi clair que les premiers livres d'Euclide. Eh ! depuis quand est-il permis, ou utile, de délayer les antécédens dans leurs conséquens pour parvenir à des théories exemptes de toute longueur superflue et de tout défaut ? N'est-ce pas, au contraire, en les isolant tour-à-tour qu'il est possible d'en saisir les limites et les véritables rapports ?

L'on répliquera peut-être que, selon M. de Lacroix, « les conséquens, lorsqu'ils sont bien déduits et bien » ordonnés, réfléchissent sur les antécédens une » lumière beaucoup plus vive que celle que ces anté- » cédens pourroient acquérir par eux-mêmes: » rien n'est si vrai. Quelque lumineuse que soit une théorie quelconque, il n'est point douteux que plus on avance dans les applications qui en sont la suite, plus on la trouve lumineuse. Mais cette gradation de lumière n'est relative qu'au degré d'attention de celui qui étudie la théorie, soit pour l'entendre tout seul, soit pour l'expliquer à d'autres. On auroit donc tort de conclure

qu'il y a des cas en théorie proprement dite, où il est plus lumineux de commencer par le *particulier*, et de venir ensuite au *général*: ce seroit interpréter d'une manière contraire au sens com mun, ce que le savant professeur n'a voulu dire que dans un sens figuré : car si les antécédens n'ont pas assez de lumière en eux-mêmes, comment les conséquens en seront-ils bien déduits et bien ordonnés ?

Puisqu'on a touché à cette maxime de M. de Lacroix, il ne sera pas inutile de la rapprocher en passant de celle de M. de Laplace, citée dans les *Réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques* : (Calcul. dif. et int. de M. de Lacroix.) « Préférez dans l'enseignement, dit M. de Laplace, les méthodes générales ; attachez-vous à les présenter de la manière » la plus simple, et vous verrez en même-temps » qu'elles sont toujours les plus lumineuses. » On diroit que celle-ci est en opposition avec la précédente: voici cependant comme je les concilie : celle de M. de Lacroix regarde la manière d'amplifier, soit de vive voix, soit dans des commentaires *ex professo*, les diverses branches de la théorie ; celle de M. de Laplace prescrit le style que l'on devroit adopter dans des livres classiques destinés à servir de texte aux leçons orales d'un professeur digne de ce nom, et d'échelle à la mémoire et à l'attention de ses élèves. Les livres de cette espèce devroient réunir le laconisme de Newton, et l'enchaînement des Elémens d'Euclide. Et voilà en deux mots la solution générale d'une question que l'on trouve longuement discutée dans plusieurs auteurs, mais qui, dans le fait, ne paroît pas encore

bien décidée : la preuve en est, que les bons Elémens sont aussi rares, que les Traités *ex professo*, plus ou moins volumineux, plus ou moins complets, sont innombrables.

Cette digression en amène une autre, que l'on me pardonnera encore, parce qu'elle ne tend pas moins à faire voir l'inconsidération avec laquelle on a renoncé à la méthode des anciens. Les quatre premiers livres d'Euclide présentent une suite de difficultés tellement graduées, qu'un enfant sachant à peine lire, peut les surmonter presque tout seul, pourvu qu'on sache lui faciliter par un procédé purement expérimental les cinq premières propositions de chaque livre, en lui inspirant peu-à-peu l'ambition de ne devoir le reste qu'à ses propres efforts. Je défie le cerveau le plus paresseux, à moins qu'il ne soit tout-à-fait inerte, de résister à cette première secousse. Or, qu'est-ce que les auteurs modernes substituent dans leurs Elémens à ce chef-d'œuvre de méthode et de simplicité ? L'arithmétique vulgaire ! C'est précisément le calcul des grandeurs exprimées par des chiffres qu'ils choisissent de préférence pour essayer les facultés intellectuelles des enfans, pour leur donner les premières idées de démonstration ! Comme si les idées de quantité et de nombre étoient antérieures à celle de corps et d'étendue; comme s'il étoit plus aisé d'attirer l'attention des enfans sur des groupes de chiffres arabes que sur des figures qu'ils peuvent mesurer en les posant les unes sur les autres. Il y en a même (on aura de la peine à le croire) à qui la méthode des premiers livres d'Euclide paroît vétilleuse, et la pente des difficultés trop

douce ! Selon eux, l'extrême facilité émousse la pénétration des enfans, à peu près comme le trop de lumière peut les rendre myopes : *Hominum intellectui*, disent-ils, *non plumæ addendæ, sed potiùs plumbum et pondera* : comme si Bacon avoit voulu dire, par exemple, que pour donner de l'agilité aux enfans, il n'y a rien comme de leur mettre des semelles de plomb avant qu'ils ne se tiennent debout. Absurdité s'il en fut jamais. Mais puisqu'il y en a plus d'une que l'on fait triompher long-tems des meilleurs raisonnemens possibles, tâchons de mettre celle-ci dans toute son évidence, à l'aide d'une observation aussi décisive que facile à concevoir.

Soient deux classes d'élèves présidées par un même professeur, et dans des circonstances aussi égales qu'il pourra se faire ; et supposons que la première étudie d'abord les quatre premiers livres de la traduction de M. Peyrard, l'équivalent du Vme livre d'Euclide que je propose dans ce supplément, et ensuite un traité ordinaire d'arithmétique, d'algèbre, et de géométrie ; supposons encore, que la seconde n'étudie que ce dernier traité pendant tout le temps que durera le premier cours ; je dis que les bons élèves de la première classe seront meilleurs et en plus grand nombre que ceux de la seconde ; qu'ils se trouveront plutôt indépendans de toute explication anticipée, et par conséquent moins à charge au professeur, et plus contens d'eux-mêmes ; qu'ils seront les premiers à s'arrêter sur les endroits foibles, s'il y en a dans le traité moderne : tandis que les meilleurs élèves de la seconde seront assez enclins à passer sur les difficultés, même les plus ordinaires,

sans s'en apercevoir, etc. etc. Et tout cela, en vertu de deux ou trois mois d'étude, que le premier cours pourra durer plus que le second.

Voilà une expérience qu'il ne seroit pas bien dispendieux de faire répéter autant de fois dans un an, qu'il y a d'écoles de mathématiques, par exemple en France; et qui mériteroit d'être encouragée plus que bien d'autres d'une utilité moins générale. Je croirois même, que ce n'est que par des observations de cette espèce, que l'on devroit se régler sur le choix des livres les plus propres à l'usage de l'école, sur la meilleure méthode d'enseignement public, et même sur l'habileté des professeurs.

Faudra-t-il donc revenir au désordre d'Euclide; commencer les élémens de mathématiques par les premières propositions de géométrie; interrompre la géométrie, pour entamer l'algèbre; passer des préliminaires de l'algèbre à la géométrie; interrompre encore la géométrie, pour retourner à l'arithmétique et à l'algèbre, etc. etc.? Il me paroît qu'oui; du moins, jusqu'à ce que l'on démontre, *à priori* ou autrement, que ce prétendu désordre n'est pas le mieux proportionné à la capacité des enfans et à la marche de leur esprit. Mais laissons parler M. Montucla, dont l'autorité doit être d'un plus grand poids que la mienne, à tous égards:

« Le reproche de désordre fait à Euclide m'oblige à » quelques réflexions sur l'ordre prétendu qu'affectent » nos auteurs modernes d'Elémens, et sur les inconvé- » niens qui en sont la suite. Peut-on regarder comme » un véritable ordre celui qui oblige à violer la condi- » tion la plus essentielle à un raisonnement géomé- » trique; je veux dire, cette rigueur de démonstration, seule

» seule capable de forcer un esprit disposé à ne se » rendre qu'à l'évidence métaphysique ? Or, rien n'est » plus commun chez les auteurs dont on parle, que ces » atteintes portées à la rigueur géométrique. Mais il » leur falloit se relâcher jusqu'à ce point, ou com- » mencer à traiter d'un certain genre d'étendue avant » que d'avoir épuisé ce qu'il y avoit à dire d'un autre » plus simple ; et ils ont mieux aimé ne démon- » trer qu'à demi, c'est-à-dire, ne point démontrer du » tout, que de blesser un prétendu ordre dont ils » étoient épris. » Un prétendu ordre, oserai-je ajouter, qui ne consiste qu'à commencer par un volume d'arithmétique, et à n'y employer que des chiffres arabes ; à ne se servir d'a^2 et b^2, que dans un gros volume d'algèbre ; à ne parler de méthode de superposition, que dans un volume de géométrie, etc. etc. Et c'est pour ne point blesser ce prétendu ordre, dont on est si épris, que l'on oblige les élèves et les professeurs à remédier eux-mêmes, à force de temps et de répétitions, au désordre et à la confusion que des raisonnemens nécessairement imparfaits, doivent entraîner avec eux.

Mais, puisqu'on est convenu de l'incompatibilité des Elémens d'Euclide avec les progrès actuels des sciences mathématiques, ainsi qu'avec le temps que l'on assigne ordinairement à cette branche de l'enseignement public, on me demandera peut-être ce qu'il faudroit faire pour ne pas encourir de pareils reproches, et mériter le suffrage des amateurs de la méthode des anciens ? Le développement de cette question, quoique tenant d'assez près à notre principal sujet, nous

meneroit trop loin : aussi je me contenterai d'y répondre indirectement d'autant plus volontiers, qu'il est temps de terminer cette digression, et qu'avant de la quitter, je me fais un devoir de citer l'excellent livre qui me l'a suggérée : ce sont les Principes Mathématiques de feu Joseph Anastace Dacunha, publiés à Lisbonne en 1781. L'ouvrage commence par un sommaire des livres de la Géométrie d'Euclide, dégagée de toute proposition devenue inutile, et réduite, en y incluant la théorie de l'Arithmétique vulgaire, à 99 pages *in*-4.°; et c'est de cette seule base, indépendamment de tout axiôme nouveau, que l'auteur a déduit les calculs modernes depuis l'application de l'algèbre à la géométrie, jusqu'à la méthode des fluxions; le tout en 300 pages, et sans jamais s'écarter de la rigueur de démonstration des anciens géomètres. Cet ouvrage que j'ai traduit du portugais depuis long-temps, et que je me propose de publier aussi-tôt que les circonstances me le permettront, prouve, à ce que je pense, que le livre dont nous avons parlé plus haut, n'est point un œuvre qu'il soit impossible d'exécuter : on y trouvera, j'espère, l'enchaînement et la rigueur des démonstrations d'Euclide reunies à l'élégance des meilleurs auteurs modernes.

Mais en voilà plus qu'il n'en faut, je pense, pour inviter et aider M. Peyrard à préserver sa traduction du malheureux oubli où tant d'autres sont tombées. C'est à cette fin que je crois faire une chose utile, en offrant ici à ceux qui voudront en profiter dès ce moment, la théorie du Vme livre, dégagée de toute obscurité, et portée au plus haut degré de correction et de simplicité

dont elle est susceptible. J'aime à croire qu'elle ne paroîtra pas indigne de figurer parmi les supplémens à la Géométrie d'Euclide de M. Peyrard, et même de remplacer le NB, pag. 61, liv. 3, de la Géom. de M. Legendre : je m'en flatte avec d'autant plus de confiance, qu'elle ne diffère des III.e et IV.e livres des Principes Mathématiques de M. Dacunha, que par la forme : je n'ai fait que les lier ensemble, en changeant l'ordre de quelques propositions, et en perfectionnant les démonstrations qui m'ont paru moins soignées dans le texte. Aussi j'ai eu soin de distinguer par des * ce qui appartient exclusivement à M. Dacunha, afin que pour tout le reste on ne s'en prenne qu'à moi, si l'on s'y aperçoit de quelque erreur. Au surplus, cette liberté que les amis de M. Dacunha me pardonneront sans doute en faveur de mes bonnes intentions, ne sauroit tirer à conséquence, par cela même que la traduction littérale des Principes Mathématiques ne tardera pas long-temps à paroître : telle est du moins mon espérance.

Je me flatte encore que les amateurs de la méthode d'Euclide trouveront la théorie en question d'une utilité plus générale que ne l'annonce le titre que je lui donne. Je crois, par exemple, qu'elle ne seroit pas déplacée en tête de l'Arithmétique de M. de Lacroix, ou de tout autre traité de la même espèce. Ce seroit donc à tort que j'y aurois mêlé des calculs numériques proprement dits : le choix des exemples doit dépendre de la méthode d'enseignement que l'on voudra adopter. Celle que M. de Lacroix conseille dans le discours déjà cité, est sans contredit la meilleure : « J'ai indiqué

» ailleurs, dit l'illustre professeur, comment je crois » qu'il faudroit initier un jeune enfant aux mathéma- » tiques ; mais après qu'il auroit été imbu des vérités » fondamentales de la science par un procédé plutôt » expérimental que théorique, on ne sauroit se dis- » penser de lui en faire recommencer l'étude par des » principes purement rationnels, sans lesquels il n'y » a point d'instruction solide. » C'est ainsi qu'un jeune enfant initié d'abord à la pratique du calcul des nombres par un procédé plutôt expérimental que théorique, ne sauroit se dispenser d'en recommencer l'étude par des principes purement rationnels, tels que ceux que je propose, sans lesquels il ne se fera jamais une idée exacte de la vraie origine de ces calculs. Voici, pourroit-on lui dire, des théorèmes déduits d'un seul principe, converti en définition ; savoir, *qu'il est possible de comparer deux grandeurs homogènes, en examinant combien de fois une partie quelconque de l'une entre dans l'autre.* Il s'agit maintenant de savoir de laquelle de ces propositions, rigoureusement démontrées, dérive telle et telle règle de calcul que nous n'avions prouvée jusqu'ici que d'une manière expérimentale et incomplète.

Quant à l'essai qui termine ce petit ouvrage, je prie le lecteur de ne le regarder que comme un second exemple de l'esprit dans lequel on devroit chercher à perfectionner et à abréger les théories d'Euclide, sans s'écarter de sa méthode, ni porter la moindre atteinte à la solidité des démonstrations. D'ailleurs, tout le monde sait que les premières définitions du premier livre d'Euclide sont un des endroits foibles de ses

Élémens, et que la théorie des parallèles en est un des plus foibles. Ne seroit-il pas possible de terminer, une fois pour toutes, les contestations qui existent encore sur ce sujet ? Je dirai cependant de la solution que je propose, ce que Simpson disoit à l'égard de la définition X du XI.me livre d'Euclide : *Nonne confitendum est geometras per mille trecentos annos in hac re elementari deceptos fuisse ? Et ex hoc quidam modestiam discere debemus, atque agnoscere quàm parum nobis cavere possumus quæ est mentis humanæ imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis scientiarum quæ inter maximè certas meritò æstimantur.* Aussi j'avouerai franchement, que ce n'est pas sans crainte de me tromper, que je reviens sur une question qui exerce la patience des géomètres depuis Euclide, et qui, malgré leurs talens et leurs efforts, a demeuré toujours indécise. On est si las de s'en occuper en vain, que l'on ne daigne même plus en entendre parler : on compte d'avance avec une illusion de plus, cachée sous de nouvelles phrases. Quelque fondée cependant que paroisse cette prévention, on auroit tort de s'y obstiner irrévocablement. Ne doit-on pas rougir de laisser en suspens une difficulté que M. Dalembert appeloit *le scandale de la géométrie*? S'il n'étoit question que de confirmer ce que tout le monde sait sur les parallèles, la persévérance seroit réellement misérable ; car des vérités si élémentaires n'ont plus besoin de confirmation : mais, puisque des géomètres du premier ordre n'ont pas trouvé au-dessous d'eux de s'en occuper, n'est-il pas très-probable qu'ils aient envisagé la question sous quelque point de vue

infiniment plus intéressant que ne sauroit le croire le plus grand nombre?

Supposons, par exemple, qu'en l'assimilant à plusieurs autres de la même espèce, et il n'en manque point, ils se soient proposés de résoudre en général les questions suivantes : Il est dans les sciences des théories régulières qui ne donnent aucune prise sur elles, tandis qu'il y en a d'autres qu'aucun effort n'a pu assujettir jusqu'à présent qu'à des enchaînemens imparfaits. Ces anomalies sont-elles inévitables, et inhérentes à la nature des objets qui y donnent lieu, où ne seroient-elles pas plutôt un symptôme d'imperfection dans l'art de bâtir des théories? Descartes vouloit que toute théorie exacte ne fût que le développement d'un seul principe converti en définition; et il est constant que cela n'est pas impossible dans plusieurs rencontres. Or, ou cette règle est générale, ou elle ne l'est pas. Si elle est sujette à des exceptions, comment se fait-il que les géomètres, si renommés pour la justesse de leurs formules, ne se soient jamais occupés d'en trouver une, moyennant laquelle on puisse discerner les cas où la règle de Descartes peut et doit être mise en pratique, d'avec ceux où elle ne sauroit avoir lieu?

Voilà, j'imagine, des questions assez intéressantes, et sur-tout très-dignes de l'attention de ceux qui attachent quelqu'importance aux progrès de l'art de raisonner. Il faut donc espérer que la solution que je propose (note 7), ainsi que l'investigation qui m'y a conduit, ne seront pas rejetées sans examen.

SUPPLÉMENT

A LA TRADUCTION D'EUCLIDE,

DE M. PEYRARD,

ET A LA GÉOMÉTRIE,

DE M. LEGENDRE.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉFINITIONS.

1. Deux choses sont *égales* lorsqu'elles peuvent être regardées comme une seule et même chose, ou lorsqu'on peut substituer l'une à la place de l'autre sans aucune erreur.

2. Pour indiquer qu'un seul objet C est égal à plusieurs autres D, E, F, etc., on écrit C=D+E+F+ etc., c'est-à-dire, C égal à D plus E plus F plus etc. En pareil cas on appelle C *tout*, ou *somme*, et D, E, F, etc., *parties*. Si les parties sont égales, le tout est *multiple* de chaque partie, et chaque partie *sous-multiple*, ou partie *aliquote* du tout.

3. P, N sont *équi-multiples* de A, B, et A, B *équi-sous-multiples* de P, N, lorsque P contient A les mêmes fois que N contient B.

4. Pour indiquer que l'on considère D comme faisant partie de C, on écrit C>D, ou D<C, et on dit que C est plus grand que D, ou que D est plus petit ou moindre que C, ou bien que le tout est plus grand que la partie, et la partie plus petite que le tout (1).

5.* L'expression C—D=E+F+G+etc., marque les parties E, F, G, etc., qu'il faut ajouter à D pour égaler C.

6. Deux objets A, B sont des *grandeurs comparables entr'elles*, ou simplement des *grandeurs*, lorsqu'un multiple quelconque de l'un peut devenir plus grand que l'autre ; c'est-à-dire, lorsqu'on peut avoir A+A+A+etc.>B, ou B+B+B+etc>A. (2)

---

(1) Voyez les notes à la fin du volume.

(2) Cette définition revient au même que la 5.me du V.me livre d'Euclide : *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur quæ possunt multiplicatæ superare.*

On trouvera qu'elle est moins simple que la définition vulgaire : *Grandeur se dit de tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution :* mais il faut faire attention que celle-ci ne sauroit embrasser la définition que je propose, convertie en théorème, ce qui est contraire à la règle de Descartes, et aux principes dont il sera question dans la note (*a*).

C'est encore d'après les mêmes principes que, de ces deux noms *grandeur* et *quantité*, j'ai cru devoir employer le premier, et rejetter l'autre. Quantité se dit de tout ce qui peut être mesuré ou nombré, ce qui présuppose les idées de grandeur, de mesure, d'unité et de nombre. D'ailleurs, dans la plupart des livres, le nom de quantité est synonyme, tantôt de grandeur, tantôt de nombre, et même très-souvent, d'expression algébrique, ce qui peut induire les commençans en erreur ; car les synonymes d'un même nom étant synonymes entr'eux, on peut très-bien s'imaginer que l'idée de nombre est aussi générale que celle de grandeur et d'expression.

7.* Quand on compare deux grandeurs A, B en examinant combien de fois A contient un sous-multiple quelconque de B, on nomme A antécédent, et B conséquent.

8.* Deux antécédens A, C, et leurs conséquens B, D, sont proportionnels, lorsque A ne peut contenir aucun sous-multiple de B plus ou moins de fois que C ne contient un équi-sous-multiple de D, ce que l'on marque en écrivant A:B::C:D, et en disant A est à B comme C est à D.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entr'elles.

Soit A=C, et B=C : je dis que A=B.

Car autrement on pourroit supposer A>B, et A−B=D [def. 4.]. Or B=C [sup.] ; donc B+D>C [def. 4.]. Mais B+D et A représentent une même grandeur [def. 5.] ; donc A>C, ce qui est impossible par supposition. Donc A=B.

Nota. Faisant attention que les mots *même* et *égal* ne sont pas synonimes, on pourra démontrer, d'une manière semblable, les axiomes ordinaires du premier livre d'Euclide.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Quelqu'inégales que soient deux gradeurs homo-

gènes, il y aura toujours un sous-multiple de la plus grande, qui sera moindre que la plus petite.

Soit $A>B$. Quelque multiple de B sera plus grand que A [def. 6.]. Soit d'abord $B+B>A$, et $A=C+C$; on aura $B+B>C+C$, et par conséquent $B>C$. Soit $B+B+B>A$, et $C=D+D$; on aura $B+B+B>D+D+D+D$, et par conséquent $B>D$; et ainsi de suite.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Soient P, Q équi-multiples de A, B : je dis que $P+Q$, P, Q seront équi-multiples de $A+B$, A, B; et que, si P est plus grand que Q, on aura aussi $P-Q$, P, Q équi-multiples de $A-B$, A, B.

Car, supposant $P=A+A$, et par conséquent $Q=B+B$, on aura $P+Q=A+A+B+B=A+B+A+B$. Supposant $P=A+A+A$, et $Q=B+B+B$, et par conséquent $P+Q=A+A+A+B+B+B$; on aura $P+Q=A+B+A+B+A+B$, et ainsi de suite.

On démontreroit de même que $P-Q$, P, Q sont équi-multiples de $A-B$, A, B, lorsque $P>Q$.

COROLLAIRE I.

Si E entre en A autant de fois que F entre en B, je dis que $E+F$ entrera en $A+B$ autant de fois que E en A, ou F en B. Car, désignant par P, Q les plus grands équi-multiples de E, F que l'on puisse retrancher de A, B; $E+F$ entrera en $A+B$ autant de fois qu'en $P+Q$; mais $E+F$ entre en $P+Q$ autant de fois que E

en A, ou F en B ; donc E+F en A+B autant de fois que E en A, ou F en B.

COROLLAIRE 2.

E étant plus grand que F, on démontreroit de même que E—F entre en A—B autant de fois que E en A, ou F en B.

COROLLAIRE 3.

Supposons que L entre en A autant de fois que M en C : je dis que L+L entrera en A+A autant de fois que M+M en C+C ; que L+L+L entrera en A+A+A autant de fois que M+M+M en C+C+C, et ainsi de suite.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, si un antécédent est plus grand que son conséquent, l'autre antécédent sera aussi plus grand que son conséquent.

A B C D
E F

soit A:B::C:D, et A>B: je dis que C>D Soit E un sous-multiple de B moindre que A, et moindre que l'excès de A sur B, et F un équi-sous-multiple de D. E entrera en A plus de fois qu'en B [const.] : mais F entre en C autant de fois que E en A [def. 8] ; donc F en C plus de fois que E en B : mais F entre en D autant de fois que E en B ; donc F en C plus de fois qu'en D, et par conséquent C>D.

Si A étoit <B, on auroit trouvé de même C<D.

COROLLAIRE.

Si un antécédent est égal à son conséquent, l'autre antécédent sera égal à son conséquent.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Dans toute proportion, le plus grand antécédent répond au plus grand conséquent.

A B C D
E F

Soit A:B::C:D, et A>C : je dis que B>D.

Supposons E, F équi-sous-multiples de B, D et E plus petit que A et plus petit que A—C. E entrera en A plus de fois qu'en C : mais F en C autant de fois que E en A [def. 8] ; donc F en C plus de fois que E en C : donc E>F : mais B, D sont équi-multiples de E, F ; donc B>D.

COROLLAIRE.

Des antécédens égaux ont des conséquens égaux.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Soit A:B::C:D : je dis que A+B:B::C+D:D, et que A—B:B::C—D:D, pourvu que dans ce dernier cas, on ait A>B.

La démonstration de cette proposition est facile à déduire de la définition 8.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Dans toute proportion dont les antécédens sont homogènes, tous les antécédens et tous les conséquens sont entr'eux comme chaque antécédent est à son conséquent.

$$\begin{matrix} A, & B, & C, & D \\ P & & Q & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A+C, & B+D, & A, & B \\ & P+Q & & P \end{matrix}$$

Soient P, Q deux équi-sous-multiples de B, D. On a démontré [prop. 3.] que P+Q et P seront équi-sous-multiples de B+D et B. Mais P+Q ne peut entrer en A+C que le même nombre de fois que P entre en A [prop. 3. corol.]; donc A+C:B+D::A:B. [déf. 8.]

COROLLAIRE 1.

Soit A:B::C:D::E:F:: etc : etc. ; on aura A+C+E+ etc. : B+D+F+ etc. :: A:B.

COROLLAIRE 2.

Puisque A:B::A:B::A:B: etc., on aura A+A+A+ etc. : B+B+B+ etc. :: A:B ; c'est-à-dire, que les grandeurs homogènes sont entr'elles comme leurs équimultiples.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Soient P, Q deux équi-multiples des antécédens A, C, et N, O deux équi-multiples des conséquens B, D ;

je dis que si les grandeurs A, B, C, D sont proportionnelles, on aura P=N, ou P>N, ou P<N en même-temps que Q=O, ou Q>O, ou Q<O; et que si P=N, ou P>N, ou P<N en même-temps que Q=O, ou Q>O, ou Q<O, les quatre grandeurs A, B, C, D seront proportionnelles.

P	N	Q	O
A	B	C	D
	E		H
	L		M

Soit A:B::C:D, et P>N : je dis que Q>O.

Soit E, H équi-sous-multiples de B, D, mais E<A, et E<P—N. Soient L, M aussi équi-sous-multiples de E, H que A, C le sont de P, Q. E entrera en P autant de fois que H en Q [prop. 3. corol. 3.] : mais E entre en P plus de fois qu'en N [construction] ; c'est-à-dire, plus de fois que H en O ; donc H en Q *plus de fois* qu'en O ; donc Q>O. Si l'on avoit supposé P<N, ou P=N, on auroit trouvé le même Q<O, ou Q=O.

Soit P=N, ou P>N, ou P<N en même-temps que Q=O, ou Q>O, ou Q<O : je dis que A:B::C:D.

Car autrement on pourra prendre E, H de sorte que E entre en A plus de fois que H en C [déf. 8], et faire P=N, ou bien P—N<E [pour cela seul que N est multiple de E]. Donc E entrera en P autant de fois qu'en N ; E en P plus de fois que H en Q [démonstration préced.] ; E en N plus de fois que H en Q ; H en O plus de fois qu'en Q ; donc, O>Q, tandis que N ne sera pas >P, contre la supposition ; donc, A:B::C:D.

COROLLAIRE.

Si quatre grandeurs A,B,C, D sont proportionnelles, deux équi-multiples quelconques P, Q des antécédens, et deux équi-multiples quelconques N, O des conséquens seront aussi en proportion, c'est-à-dire, que l'on aura P:N::Q:O.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, chaque conséquent est à son antécédent comme l'autre conséquent est à son antécédent.

Soit A:B::C:D: je dis que B:A::D:C

P N Q O N P O Q
A, B, C, D B, A, D, C

Car supposant P, Q équi-multiples de A, C ; et N, O équi-multiples de B,D, on aura P:N::Q:O [prop. 8. corol.] et par conséquent P=N, ou P>N, ou P<N en même-temps que Q=O, ou Q>O, ou Q<O. [prop. 4] Donc B:A::D:C. [prop. 8.]

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Si les antécédens sont homogènes, ils seront entr'eux comme les conséquens.

Soit A:B::C:D, et A, C homogènes : je dis que A:C::B:D

P N Q O P Q N O
A, B, C, D A, C, B, D

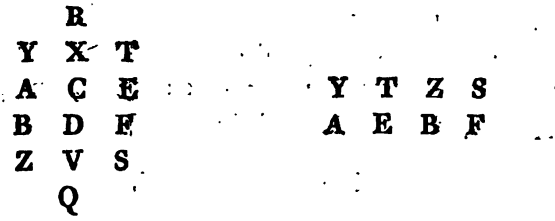
Car prenant P, N équi-multiples de A, B, et Q, O équi-multiples de C, D, on aura P:N::A:B et Q:O::C:D [prop. 7. corol. 2.] : mais A:B::C:D: [sup.]

Donc P:N::Q:O [déf. 8.] et par conséquent P=Q, ou P>Q, ou P<Q en même-temps que N=O, ou N>O, ou N<O. [prop. 5.]: donc A:B::C:D [prop. 8.]

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Soit dans une série de grandeurs la première à la seconde, la seconde à la troisième, la troisième à la quatrième, et ainsi de suite, comme dans une autre série de grandeurs la première à la seconde, la seconde à la troisième, la troisième à la quatrième, et ainsi de suite; je dis que la première et la dernière grandeur de la première série seront entr'elles comme la première et la dernière de la seconde.



Soit A:C::B:D ; C:E::D:F dans les deux séries de grandeurs A, C, E ; B, D, F : je dis que A:E::B:F.

Si les deux séries étoient homogènes entr'elles, on auroit de suite A:C::B:D [sup.] ; E:C::F:D [sup. et prop. 9.] ; A:B::C:D ; E:F::C:D [prop. 10.] ; et par conséquent A:B::E:F [déf. 8.], ou A:E::B:F [prop. 10.]

Soient

Soient ou non homogènes entr'elles les deux séries proposées : prenons Y, Z équi-multiples de A, B; X, V équi-multiples de C, D; et T, S équi-multiples de E, F : mais à condition que T ne soit pas égal à Y.

Soient R, Q équi-sous-multiples de X, V; mais R plus petit que Y, plus petit que T, et plus petit que la différence entre Y et T. Puisque A:C::B:D, on aura Y:X::Z:V, et X:T::V:S [prop. 8 corol.]; et par conséquent T:X::S:V [prop. 9.]. Soit Y>T. R entrera en Y plus de fois qu'en T [construc.]; mais Q doit entrer en Z autant de fois que R en Y [def. 8] : donc Q en Z plus de fois que R en T. Or Q doit entrer en S autant de fois que R en T [def. 8.]; donc Q en Z plus de fois qu'en S, et par conséquent Z>S en même temps que Y>T. On auroit démontré de même Z=S, ou Z<S en même temps que Y=T, ou Y<T. Donc A:E::B:F [prop. 8.].

Soit A:C::B:D; C:E::D:F; E:G::F:H dans les deux séries A, C, E, G; B, D, F, H : je dis que A:G::B:H; car, par la démonstration précédente, on aura, dans les deux séries A, E, G; B, F, H, A:G::B:H, et ainsi de suite.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Soit dans une série la première grandeur à la dernière, la seconde à la dernière, la troisième à la dernière, et ainsi de suite, comme dans une autre série la première grandeur à la dernière, la seconde à la

dernière, la troisième à la dernière, et ainsi de suite: je dis que tous les termes de la première pris ensemble, moins le dernier terme, seront au dernier terme, comme tous ceux de la seconde pris ensemble, moins le dernier terme, sont au dernier terme.

Soit A:B::C:D et E:B::F:D dans les deux séries A, E, B; C, F, D; je dis que A+E:B::C+F:D.

Puisque E:B::F:D [sup.], on aura B:E::D:F [prop. 9.]: donc les deux séries A, B, E; C, D, F donneront A:E::C:F [prop. 11.], et A+E:E::C+F:F [prop. 6.]; et par conséquent on aura dans les deux séries A+E, E, B; C+F, F, D, A+E:B::C+F:D [prop. 11.].

Soit A:B::C:D; E:B::F:D; G:B::H:D dans les deux séries A, E, G, B; C, F, H, D. Puisqu'on a A+E:B::C+F:D [démontré], les deux séries A+E, G, B; C+F, H, D donneront A+E+G:B::C+F+H:D, et ainsi de suite.

COROLLAIRE.

Quatre grandeurs seront proportionnelles, si les antécédens sont équi-multiples de leurs conséquens: car les deux séries A, A, A, etc.; B, B, B, etc. étant dans le cas de la proposition XII, donnent A+A+A+etc.:A::B+B+B+ etc.:B.

SCHOLIE.

Lorsqu'on a A:B::C:D, on est dans l'usage de dire: *invertendo* B:A::D:C; *alternando* A:C::B:D; *componendo* A+B:B::C+D:D; *dividendo* A−B:B::C−D:D. etc.

SECONDE PARTIE.

DÉFINITIONS.

9.* Lorsqu'on convient de désigner un conséquent quelconque par le chiffre 1, et de lui donner le nom d'*unité*, on donne à son antécédent celui de *nombre*. L'unité et ses multiples sont des nombres entiers : tout autre nombre est une *fraction*, ou nombre *fractionnaire* ; et celui qui ne sauroit être multiple d'aucun sous-multiple de l'unité s'appelle nombre *sourd* ou *irrationnel*.

10.* Le nombre qui est à l'unité comme un antécédent est à son conséquent, s'appelle *raison* ou *rapport* entre cet antécédent et son conséquent (1).

(1) L'on suppose ici, que l'idée de rapport dépend de celle de proportion : ce qui me paroît évident. Car, dans l'acte de comparer deux grandeurs homogènes A, B, et tant que l'on ne considère aucun autre objet A-B, ou $\frac{A}{B}$, on ne porte aucun jugement; on cherche seulement à le porter. Cependant les uns disent : *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundùm quantitatem habitudo* ; d'autres affirment, que : *Toute perception de rapport est une idée abstraite, car un rapport n'est qu'une vue de l'esprit.* Ces définitions peuvent être très-intelligibles pour ceux qui les inventent ; mais, en mathématique, il faut que les rapports soient des grandeurs tantôt abstraites, tantôt concrètes, comme on le veut. Je croirois même, que ces sortes de définitions ne sont pas à l'abri de toute chicane, même en idéologie. *Pour percevoir un rapport*, dit-on ; *pour porter un*

11. * *Multiplier* une grandeur par un nombre, c'est chercher une autre grandeur qui soit à la proposée comme le nombre est à l'unité. La grandeur proposée s'appelle *multiplicande ;* le nombre, *multiplicateur;* et la grandeur demandée, *produit.* Le multiplicande et le multiplicateur sont les facteurs du produit. Le produit de deux facteurs multiplié par un nombre, ou le produit de deux nombres multiplié par une grandeur, s'appelle produit de trois facteurs ; et ainsi de suite. Le produit de deux facteurs égaux est le carré de chaque facteur ; et chaque facteur est la racine carrée du produit : celui de trois facteurs égaux s'appelle *cube* de chaque facteur ; et chaque facteur, racine cubique du produit. On désigne le produit des facteurs a, b, c, etc., en écrivant $a \times b \times c \times$ etc. ; ou simplement abc etc.

12. * Le produit de plusieurs raisons ou rapports s'appelle raison ou rapport composé des raisons ou rapports qui en sont les facteurs. Le rapport composé

---

jugement (ce qui est la même chose), *il faut avoir en même temps deux idées distinctes ; mais il n'en faut jamais que deux.* Il me semble, à moi, qu'il en faut davantage. Lorsque j'affirme, par exemple, *qu'un cheval est bon coureur*, je veux dire qu'il est capable de courir aussi bien que les chevaux que l'on est convenu de distinguer par le nom spécifique de *bons coureurs.* Désignons par 1 la course de ceux-ci dans un temps quelconque ; et par C, la course d'un cheval A dans le même temps. Plus le nombre C approchera de 1, plus le nom de *bon coureur* conviendra au cheval A. Lorsque j'affirme que l'objet A est de la couleur B, je veux dire qu'il est semblable aux objets que l'on convient de nommer de la couleur B : en un mot, l'attribut sert toujours à distinguer l'objet soit d'un autre, soit de plusieurs autres du même genre.

de deux rapports égaux est la raison doublée ou le carré de chaque facteur ; et chaque facteur, raison sous-doublée, ou racine carrée du produit. Le rapport composé de trois rapports égaux est la raison triplée, ou le cube de chaque facteur ; et chaque facteur, racine cubique du produit : et ainsi de suite.

13. * On *divise* une grandeur par une autre de la même espèce, quand on cherche le rapport entr'elles. L'antécédent prend alors le nom de dividende ; le conséquent, celui de diviseur ; et le rapport s'appelle quotient. On divise un antécédent par un nombre, lorsqu'on en cherche le conséquent, le nombre en étant le rapport. Pour lors l'antécédent s'appelle *dividende ;* le conséquent, *quotient ;* et le nombre, *diviseur.* L'expression $\frac{A}{B}$ désigne le rapport entre A et B, ou le quotient de A divisé par B. On donne aussi à $\frac{A}{B}$ le nom de fraction : et alors on appelle A, numérateur ; et B, dénominateur.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

* Mêmes facteurs donnent un même produit.

Soient a, b, deux nombres : je dis que $ab=ba$.

Car, prenant a pour multiplicateur, on aura $ab:b::a:1$ [déf. 11.], et $ab:a::b:1$ [prop. 10.] Prenant b pour multiplicateur, on a $ba:a::b:1$: donc $ab:a::ba:a$ [def. 8] ; donc $ab=ba$ [prop. 5. corol.]

Soit G une grandeur quelconque, et a, b, deux nombres : je dis que $aGb=bGa=abG$.

3...

Prenant a pour multiplicateur, on aura $bG \times a : bG :: a : 1$; $ba : b :: a : 1$: donc $bG \times a : bG :: ba : b$; mais $bG : G :: b : 1$: donc les deux séries $bG \times a$, bG, G ; ba, b, 1, donneront $bG \times a : G :: ba : 1$ [prop. 11] : mais $G \times ab : G :: ab : 1$: donc $bG \times a : G :: G \times ab : G$, et, par conséquent, $bG \times a = G \times ab$, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

COROLLAIRE.

Soit R le rapport entre A et B : je dis que $BR = A$: car $A : B :: R : 1$ [déf. 10.] ; $BR : B :: R : 1$ [déf. 11.], et $A : B :: BR : B$: donc $A = BR$.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la seconde sera égal à celui de la troisième à la quatrième.

Soit R le rapport entre A et B, et r celui de C à D, et supposons $A : B :: C : D$: je dis que $R = r$.

Car $R : 1 :: A : B :: C : D :: r : 1$, et par conséquent $R : 1 :: r : 1$; donc $R = r$.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Dans toute série de grandeurs homogènes, le rapport de la première à la dernière est composé de celui de la première à la seconde, de celui de la seconde à la troisième, de celui de la troisième à la quatrième, et ainsi de suite.

Soit A,B,C,D la série ; m le rapport de A à B ; n celui de B à C, et p celui de C à D : je dis que A : D :: mnp : 1.

Car A = mB ; B = nC [prop. 13. corol.]

Donc A = mnC ; mais C = pD ; donc A = mnpD.

Or, mnpD : D :: mnp : 1 ; donc A : D :: mnp : 1, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des termes de la série.

COROLLAIRE.

Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion continue, c'est-à-dire, lorsque la première est à la seconde comme la seconde est à la troisième, comme la troisième est à la quatrième, et ainsi de suite : je dis, que la première sera à la troisième en raison doublée de la première à la seconde, ou comme le carré de la première au carré de la seconde ; que la première sera à la quatrième en raison triplée de la première à la seconde, ou comme le cube de la première au cube de la seconde, et ainsi de suite.

PROPOSITION XVI.

Le produit de deux facteurs, dont l'un est l'unité, est égal à l'autre facteur.

C'est-à-dire, que A × 1 = A ; car A × 1 : A :: 1 : 1 ; donc A × 1 = A.

PROPOSITION XVII.

Le rapport entre deux grandeurs égales, est égal à l'unité ; car A : A :: 1 : 1.

3....

PROPOSITION XVIII.

Le dividende peut être regardé comme le produit du diviseur multiplié par le quotient ; car, soit D le dividende, d le diviseur, et q le quotient : on aura $D:d::q:1$ [déf. 13.] ; et $dq:d::q:1$. [déf. 11.] ; donc $D:d::dq:d$ [déf. 8.], et par conséquent, $D=dq$.

PROPOSITION XIX.

Si deux nombres et deux grandeurs quelconques sont en proportion : je dis que le produit des extrêmes sera égal à celui des moyens ; et réciproquement.

Soient a, b deux nombres, et $a:b::C:D$; je dis que $aD=bC$. Car désignant par R le rapport de chaque antécédent à son conséquent, on aura $a=Rb$, et $RD=C$; [prop. 13, corol.] : or, mêmes facteurs donnent un même produit ; donc $aRD=bCR$; donc $aRD:aD::R:1$, $bRC:bC::R:1$ et par conséquent, $aD=bC$.

Supposons $aD=bC$: je dis que $a:b::C:D$.

Car, si a, b, C, D ne sont pas proportionnels, soit $a:b::C:M$: on aura $aM=bC$ [démont.] ; donc $aD=aM$; donc $aD:D::a:1$; $aM:M::a:1$, et par conséquent, $aD:D::aM:M$; mais les antécédens sont égaux ; donc $D=M$.

PROPOSITION XX.

Toute fraction dont le dénominateur est un nombre, est égale à son numérateur multiplié par le réciproque

de ce même nombre; c'est-à-dire, multiplié par l'unité divisée par le même nombre.

Soit n un nombre, et $\frac{G}{n}$ une fraction quelconque :

je dis que $\frac{G}{n}=\frac{1}{n}\times G$.

Car $\frac{G}{n}:G::1:n$ [déf. 13] ; mais $\frac{1}{n}\times G:G::\frac{1}{n}:1$;

donc $\frac{G}{n}:G::\frac{1}{n}\times G:G$, et par conséquent $\frac{G}{n}=\frac{1}{n}\times G$.

PROPOSITION XXI.

Former une fraction qui soit le produit de deux autres, lorsque le numérateur et le dénominateur de l'un des facteurs seront des nombres.

Soient a, b deux nombres, et $\frac{C}{D}$ une fraction quelconque : je dis que $\frac{a}{b}\times\frac{C}{D}=\frac{aC}{bD}$; car $\frac{a}{b}\times b=a$, et $\frac{C}{D}\times D=C$ [prop. 13. corol.] et par conséquent,

$aC=\frac{a}{b}\times b\times\frac{C}{D}\times D=bD\times\frac{a}{b}\times\frac{C}{D}$ [prop. 13.] ;

donc $aC:bD::\frac{a}{b}\times\frac{C}{D}:1$ [prop. 19] ; donc $\frac{aC}{bD}=\frac{a}{b}\times\frac{C}{D}$ [déf. 18.]

PROPOSITION XXII.

Diviser une fraction par une autre fraction :

Soit $\frac{A}{B}$ le dividende, $\frac{C}{D}$ le diviseur, et C, D homogènes.

On aura $\frac{A}{B} \times \frac{D}{C} : \frac{A}{B} :: \frac{D}{C} : 1$ [déf. 11] : mais $\frac{D}{C} : 1 :: D : C$ [déf. 13.] ; et $D : C :: 1 : \frac{C}{D}$; [déf. 13] : donc

$\frac{A}{B} \times \frac{D}{C} : \frac{A}{B} :: 1 : \frac{C}{D}$; $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} :: \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} : 1$, et par conséquent

$\frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$ est le quotient de $\frac{A}{B}$ divisé par $\frac{C}{D}$ [déf. 13.]

Soient $\frac{E}{a}$ le dividende, $\frac{F}{b}$ le diviseur, et a, b deux nombres : on aura $\frac{E}{a} : \frac{F}{b} :: \frac{E}{F} \times \frac{b}{a} : 1$, car le produit des extrêmes est $\frac{E}{a}$, et le produit des moyens est

$\frac{E}{F} \times \frac{F}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{E}{F} \times F \times \frac{1}{b} \times \frac{b}{a} = E \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{E}{a}$: donc

$\frac{E}{F} \times \frac{b}{a}$ est le quotient de $\frac{E}{a}$ divisé par $\frac{F}{b}$.

COROLLAIRE I.

Sans rien changer à la valeur d'une fraction, on en pourra multiplier ou diviser les deux termes par un même facteur.

COROLLAIRE 2.

Pour réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, on n'aura donc qu'à multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des autres. Par exemple : les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ seront égales à $\frac{adf}{bdf}, \frac{bef}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$.

PROPOSITION XXIII.

Trouver la somme de plusieurs fractions.

Soient $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$ les fractions et B, C, D, A des grandeurs homogènes : je dis que $\frac{B}{A}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A}=\frac{B+C+D}{A}$.

Car dans ces deux séries

B, C, D, A

$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, 1$

on a $B:A::\frac{B}{A}:1$; $C:A::\frac{C}{A}:1$; $D:A::\frac{D}{A}:1$: donc

$B+C+D : A :: \frac{B}{A}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A} : 1$ [prop. 12.], et par conséquent, $\frac{B+C+D}{A} = \frac{B}{A}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A}$ [déf. 13.]

Soient $\frac{F}{e}, \frac{G}{e}, \frac{H}{e}$ les fractions, e un nombre quelconque, et F, G, H des grandeurs homogènes; on aura $F : \frac{F}{e} :: e : 1$; $G : \frac{G}{e} :: e : 1$, et ainsi de suite; donc $F : \frac{F}{e} :: G : \frac{G}{e} :: H : \frac{H}{e} :: e : 1$, et par conséquent, $F+G+H : \frac{F}{e}+\frac{G}{e}+\frac{H}{e} :: e : 1$: donc $\frac{F+G+H}{e} = \frac{F}{e}+\frac{G}{e}+\frac{H}{e}$ [déf. 13.]

Lorsque les dénominateurs seront différens, il faudra commencer par les rendre égaux.

PROPOSITION. XXIV.

Trouver l'excès d'une fraction sur une autre.

Soient $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ les fractions, et $B > C$: je dis que $\frac{B}{A}-\frac{C}{A} = \frac{B-C}{A}$; car $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}+\frac{B-C}{A} = \frac{C}{A}+\frac{B-C+C}{A}$

[prop. 23.] $\frac{B}{A} = \frac{B}{A}$: donc $\frac{B}{A} = \frac{C}{A} = \frac{B-C}{A}$ [déf. 5.]

Si les dénominateurs n'étoient pas égaux, on commenceroit par les rendre égaux.

PROPOSITION XXV.

Si le dénominateur d'une fraction est un nombre entier, je dis que le numérateur sera aussi multiple de la fraction, que le dénominateur l'est de l'unité; et si le numérateur, ainsi que le dénominateur, sont des nombres entiers, la fraction sera aussi multiple du réciproque du dénominateur, que le numérateur l'est de l'unité.

Soit A une grandeur quelconque, et b un nombre entier. Supposons M aussi multiple de $\frac{A}{b}$ que b l'est de 1 : on aura $M:\frac{A}{b}::b:1$ [prop. 7. corol. 2.] : mais $A:\frac{A}{b}::b:1$ [déf. 13] ; donc $M:\frac{A}{b}::A:\frac{A}{b}$, et par conséquent M=A [prop. 5. corol.]

Soient A et b des nombres entiers, et M aussi multiple de $\frac{1}{b}$ que A l'est de 1 : on aura $M:\frac{1}{b}::A:1$: mais $\frac{A}{b} = \frac{1}{b} \times A$ [prop. 20.], et par conséquent $A:\frac{1}{b}::\frac{1}{b}:1$ [déf. 11.] ; donc $M:\frac{1}{b}::\frac{A}{b}:\frac{1}{b}$, et $M=\frac{A}{b}$.

PROPOSITION XXVI.

Multiplier des sommes, ou des différences indiquées, c'est-à-dire, réduire en série l'expression d'un produit.

Soient a et $b+c$ deux facteurs : je dis que $a(b+c)=ab+ac$. Car $b=\frac{ab}{a}$, et $c=\frac{ac}{a}$: donc $b+c=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}=\frac{ab+ac}{a}$ [prop. 23.], et par conséquent $a(b+c)=ab+ac$ [prop. 18.]

Soient $a+b$ et $c+d$ les facteurs : on aura $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$ [démontré] $=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$ [démontré.]

Soient $a-b$, et $c-d$ les facteurs : on aura $(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d=a(c-d)-b(c-d)$ [dém.] $=ac-ad-b(c-d)$ [démont.] $=ac-ad-bc+bd$.

Pour prouver cette dernière expression, on n'a qu'à y ajouter, de part et d'autre, $bc-bd$, ou $b(c-d)$.

Ces exemples font voir ce qu'il faut faire en pareil cas.

Désignant, par exemp., $(a+b+\text{etc.})(a+b+\text{etc.})$ par $(a+b+\text{etc.})^2$ et $(a+b+\text{etc.})(a+b+\text{etc.})(a+b+\text{etc.})$, par $(a+b+\text{etc.})^3$: on aura

$(a+b+c+d+\text{etc.})^2=a^2+(2a+b)b+\text{etc.}=(a+b)^2+(2a+2b+c)c+\text{etc.}=(a+b+c)^2+(2a+2b+2c+d)d+\text{etc.}=(a+b+c+d)^2+(2a+2b+2c+2d+e)e+\text{etc.}=\text{etc.}$

$(a+b+c+d+\text{etc.})^3=a^3+(3a^2+(3a+b)b)b+\text{etc}=(a+b)^3+(3(a+b)^2+(3a+3b+c)c)c+\text{etc.}=(a+b+c)^3+(3(a+b+c)^2+(3a+3b+3c+$

$d)d)d+\text{etc.}=(a+b+c+d)^3+(3(a+b+c+d)^2+(3a+3b+3c+3d+e)e)e+\text{etc.}=\text{etc.}$

PROPOSITION XVII.

* Deux nombres entiers étant proposés, trouver deux autres nombres entiers les plus petits possibles, qui soient entre eux exactement, ou à-peu-près, comme les nombres donnés.

Soient M, N les nombres donnés, et $M>N$.

etc.	t	S	r	P	N	M
	e	d	c	b	a	

Supposons $\frac{M}{N}=a+\frac{P}{N}$; $\frac{N}{P}=b+\frac{r}{P}$; $\frac{P}{r}=c+\frac{S}{r}$;

et ainsi de suite.

On aura $\frac{M}{N}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$:.....

Donc $\frac{M}{N}>\frac{a}{1}$; mais $\frac{1}{b}>\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$; donc.....

$a+\frac{1}{b}\left[=\frac{ab+1}{b}\right]>\frac{M}{N}$. On a de même.....

$\frac{1}{c}>\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}$; $b+\frac{1}{c}>\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}$ et par conséquent

$\frac{1}{b+1} < \frac{1}{\frac{b+1}{c}}$: donc $a + \frac{1}{\frac{b+1}{c}} \Big[= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{\frac{c+1}{d+etc.}} \Big] \frac{(ab+1)c+a}{bc+1} < \frac{M}{N}$. On démontreroit de même.....

$\frac{((ab+1)c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b} > \frac{M}{N}$, et ainsi de suite.

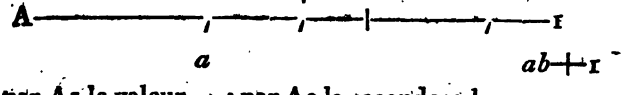
Comparant entr'elles ces valeurs approchées de $\frac{M}{N}$, et désignant par $\wp$ leur inégalité, on aura :

$\frac{a}{1} \wp \frac{ab+1}{b} = \frac{1}{b}$; $\frac{ab+1}{b} \wp \frac{(ab+1)c+a}{bc+1} = \frac{1}{b(bc+1)}$;

$\frac{(ab+1)c+a}{bc+1} \wp \frac{((ab+1)c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{((bc+1)d+b)(bc+1)}$; et ainsi de suite.

Représentons par la ligne AB la fraction $\frac{M}{N}$;



par A1 la valeur $\frac{a}{1}$; par A2 la seconde valeur $\frac{ab+1}{b}$;

par

par A3 la troisième $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$; par A4 la quatrième $\frac{((ab+1)c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b}$, et ainsi de suite.

Puisque les différences de ces valeurs sont toujours plus petites, on aura $B1 > B2$; $B2 > B3$; $B3 > B4$, et ainsi de suite : donc la première valeur sera moins approchée de $\frac{M}{N}$ que la seconde ; la seconde moins approchée que la troisième, et ainsi de suite.

Soient, s'il est possible, X, Z deux nombres entiers, dont le rapport $\frac{X}{Z}$ représente une valeur de $\frac{M}{N}$ plus rapprochée et plus simple qu'aucune des valeurs trouvées : $\frac{X}{Z}$ devra donc se trouver entre deux de ces valeurs consécutives, dont l'une plus grande, et l'autre plus petite que $\frac{M}{N}$.

Soient $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$ ces deux valeurs : $\frac{1}{QS}$ en sera la différence.

Supposons $\frac{X}{Z} \backsim \frac{P}{Q} = \frac{m}{ZQ}$, et $\frac{X}{Z} \backsim \frac{R}{S} = \frac{n}{ZS}$: on aura

$$\frac{1}{QS} = \frac{m}{ZQ} + \frac{n}{ZS} = \frac{mS+nQ}{ZSQ} = \frac{1}{QS} \times \frac{mS+nQ}{Z} ;$$

donc $\frac{mS+Qn}{Z}=1$, et par conséquent $mS+nQ=Z$;

ce qui est impossible : donc la fraction $\frac{X}{Z}$ est impossible.

Soit $\frac{x}{z}=\frac{P}{Q}$: on aura $\frac{x}{z}\infty\frac{R}{S}=\frac{xS\infty zR}{zS}=\frac{1}{QS}$,

et par conséquent $\frac{xS\infty Rz}{z}=\frac{1}{Q}$: donc z ne sauroit être $<Q$, car on auroit alors $xS\infty zR<1$, ce qui seroit absurde ; ni $x<P$, car z n'étant pas $<Q$, on ne sauroit supposer $\frac{x}{z}=\frac{P}{Q}$, lorsque $x<P$: donc $\frac{P}{Q}$ est réduite à la plus simple expression. (*)

(*) Soit $\frac{M}{N}=\frac{19514}{4752}$, et 4,9,2,1,1,4 les valeurs de a,b,c,d,e,f :

On aura $\frac{4}{1}$, 1.re valeur approchée ;

$\frac{4\times9+1}{1\times9}=\frac{37}{9}$, 2.e plus approchée ;

$\frac{37\times2+4}{9\times2+1}=\frac{78}{19}$, 3.e plus approchée ;

$\frac{78\times1+37}{19\times1+9}=\frac{115}{28}$, 4.e plus approchée ;

$\frac{115\times1+78}{28\times1+19}=\frac{193}{47}$, 5.e plus approchée ;

$\frac{193\times4+115}{47\times4+28}=\frac{887}{216}$ valeur exacte.

ESSAI SUR LES PARALLÈLES.

DÉFINITIONS.

1. La grandeur dont on peut comparer les parties sous le rapport de leurs positions, soit en les supposant en contact deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, et ainsi de suite; soit en les imaginant séparées à volonté, s'appelle *corps*. (*a*)

2. * Le corps que l'on peut supposer nul et indivisible par rapport à un autre corps, sans qu'il en résulte la moindre erreur considérable, se nomme *point*.

3. La *ligne* est un corps que l'on peut supposer formé de points contigus entr'eux dans un seul sens; c'est-à-dire, le premier contigu au second sans toucher le troisième, le second contigu au troisième sans toucher le quatrième, et ainsi de suite.

4. * Deux lignes qui ne sauroient se rencontrer dans deux points communs, sans se toucher dans tous leurs points intermèdes, c'est-à-dire, sans être égales entre les deux points de contact, s'appellent *droites*. (*b*)

5. *Surface* est un corps que l'on peut concevoir formé de lignes, la première contigüe à la seconde sans toucher la troisième, la seconde contigüe à la troisième sans toucher la quatrième, et ainsi de suite.

6. La surface qui ne peut rencontrer aucune droite en deux points quelconques, sans en toucher tous les points intermèdes, est un *plan*, ou une surface *plane*.

7. Toute ligne qu'aucune droite ne peut rencontrer que dans un ou deux points, est une ligne *convexe* ou *concave du même côté*. Elle est convexe extérieurement et concave intérieurement par rapport à une droite terminée entre ses extrémités. Cette droite en est la *corde*.

8. *Courbe plane* est une ligne située dans un plan, et dont chaque partie convexe du même côté, quelque petite qu'on la suppose, est toujours plus grande que sa corde, et plus petite que toute ligne extérieure située dans le même plan, et ayant la même corde. (*c*)

9. Lorsqu'on compare plusieurs droites comprises entre une courbe plane et un point situé dans le même plan, on nomme ces droites *rayons;* et le point, *pôle*.

10. Le pôle prend le nom de *centre* lorsqu'il divise également tous les *diamètres* de la courbe; je veux dire, toutes les droites composées de deux rayons.

11. La courbe plane s'appelle *cercle* lorsque tous les rayons en sont égaux; on la nomme *circonférence* quand on donne le nom de cercle au plan qu'elle renferme.

12. Une portion de la circonférence, répétée autant de fois qu'on veut, produit une *courbe circulaire*. Si la courbe circulaire est plus petite que la circonférence, on lui donne le nom d'*arc* de cercle.

13. Une ligne, ou plusieurs lignes situées dans un même plan, forment une *figure plane*. La figure plane, qui ne renferme aucun plan déterminé, est infinie : elle est finie dans le cas contraire.

14.* Angle est la figure que deux lignes forment lorsqu'elles aboutissent à un même point. Ce point est le

sommet de l'angle, et les lignes en sont les côtés. Si les côtés sont des lignes droites, l'angle est *rectiligne.*

15. *Quand on compare des angles rectilignes comme si c'étoient des grandeurs finies, on présuppose toujours des courbes circulaires terminées à leurs côtés, et décrites de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux. En pareils cas, le nom d'angle désigne le plus petit des deux arcs circulaires qui répondent à un même angle, à moins que l'on n'avertisse pas du contraire. Si cet arc n'est point décrit, on le suppose. (*d*)

16. * Lorsqu'un angle rectiligne est le quart d'une circonférence décrite selon les conditions de la définition précédente, on le nomme *droit.* Les côtés de l'angle droit sont *perpendiculaires* entr'eux.

17. Nommons *trilatère* la figure que trois droites forment lorsqu'elles sont infinies et situées dans un même plan; pourvu que deux de ces trois lignes, pour le moins, puissent toujours se rencontrer. Deux droites qui peuvent se rencontrer sont *sécantes* l'une de l'autre.

18. Si les côtés du trilatère se coupent réciproquement, la figure finie déterminée par les trois points de rencontre, s'appelle *triangle.*

19. Lorsque deux côtés d'un trilatère sont tels que toute sécante de l'un est nécessairement sécante de l'autre, je les nomme *parallèles.* (*e*)

DEMANDES.

1. Conduire une droite infinie par deux points donnés.

2. Le centre et le rayon étant donnés, décrire un cercle.

3. La sécante et un côté étant proposés, conduire par un point donné de la sécante une troisième droite parallèle au côté proposé. (*f*)

PROPOSITIONS.

I. Deux surfaces planes tombent l'une sur l'autre lorsqu'elles se touchent aux sommets d'un même triangle.

Fig. 1. Soient A,B,C les trois sommets communs à deux différens plans. Les droites AB,BC,AC tomberont à-la-fois sur les deux plans [déf. 6]. Soit D un point quelconque de l'un de ces deux plans : je dis qu'il sera aussi dans l'autre plan ; car la droite DF qui rencontreroit les deux surfaces dans les points E,F des droites AC,BC, ne peut tomber que dans un seul et même plan [déf. 6].

Fig. 2. II. Une droite AB, et deux points C,G étant donnés, tirer du point C vers G une droite CH=AB.

Joignez BC, CG, et des centres B,C décrivez deux cercles avec le même rayon BC. Du point de rencontre F tirez les droites FB, FC.

Le triangle FBC sera équilatéral, parce que les rayons FB, FC sont égaux au même rayon BC [déf. 11]. Du centre B avec le rayon AB décrivez l'arc A D, et prolongez FB, FC. La droite EC sera égale à AB. Du centre F avec le rayon FD décrivez l'arc DE, et du centre C avec le rayon CE décrivez l'arc EH : on aura AB=BD=CE=CH, et par conséquent CH=AB.

Fig. 3. III. Si deux angles rectilignes coupent, selon la définition 15, des arcs égaux dans deux cercles donnés,

ils couperont aussi des arcs égaux dans deux autres cercles quelconques, décrits de leurs sommets comme centres, avec des rayons égaux.

Soient BF, IP les cercles donnés ; DG, LO deux cercles quelconques ; AB=HI ; AD=HL, et l'arc BC=MI. Je dis que l'arc ED=NL.

Posons le plan de la figure A sur celui de la figure H, de sorte que le centre A tombe sur le centre H ; le rayon AB sur quelque point du rayon HL, et AE sur quelqu'autre point du plan H vers HN. Les points B,D doivent tomber sur les points I,L, parce que AB=HI, et AD=HL [déf. 4] ; Les deux plans tomberont l'un sur l'autre [prop. 1], ainsi que les circonférences sur les circonférences ; car autrement il y auroit des rayons différens entr'eux, et cependant égaux à un même rayon HI. Donc le point C tombe sur M, parce que l'arc BC=IM [sup.] ; et par conséquent E sur N, et l'arc ED sur l'arc NL.

COROLLAIRES.

1. Deux angles sont égaux lorsqu'ils coupent des arcs égaux dans deux cercles donnés, et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux.

2. Deux secteurs de cercles ACB, HMI, ainsi que deux triangles ADC, HLM sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun.

3. Les cercles à rayons égaux, ainsi que les arcs d'un même cercle à cordes égales, sont égaux.

4. On pourra donc faire un angle égal à un angle donné.

5. Les angles droits sont égaux.

6. Deux angles contigus d'un même côté, formés par deux droites qui se coupent, sont égaux à deux droits.

7. Les deux côtés d'un angle seront en ligne droite toutes les fois qu'il vaudra deux angles droits.

8. Les angles opposés au sommet formés par deux droites qui se coupent, sont égaux, Etc. etc.

PROPOSITIONS.

Fig. 4. IV. Dans un même triangle, les angles opposés à des côtés égaux sont égaux.

Soit dans le triangle ABC le côté AB=AC : je dis que l'angle ABC=ACB.

Car, faisant l'angle F=A, et les côtés FD=AB, et FE=AC, on pourra poser le triangle ABC sur le triangle FDE, tantôt en plaçant l'angle B sur l'angle D, tantôt l'angle C sur le même angle D [dem. précédente]; d'où il suit que les angles B,C sont égaux à un même angle D, et par conséquent égaux entr'eux.

Fig. 5. V. Elever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée.

Soient DE la droite donnée, et ADE,DCE deux triangles équilatéraux [prop. 2.] : je dis que la droite AC est perpendiculaire sur le milieu de DE. Car, suivant la méthode des démonstrations précédentes, on pourra appliquer la figure ADC à la figure AEC, en plaçant la partie BD sur la partie BE, parce que les côtés et les angles des deux triangles ADC,AEC, sont égaux (const. et prop. 4.); d'où il suit que le point B est le milieu de DE; que les quatre angles en B sont égaux; que l'angle DBA est droit [déf. 16], et

que AB est perpendiculaire sur le milieu de la droite DE.

VI. Si les côtés d'un trilatère se coupent mutuellement, la somme des deux angles intérieurs, contigus à la sécante, sera moindre que deux angles droits. Fig. 6.

Soit AC la sécante, et GB,FB les côtés du trilatère. Par le milieu E de AC tirez la droite BD double de BE, et joignez CD. Les triangles AEB,CED ont un angle égal en E. [corol. 8.], compris entre des côtés égaux [const.]; donc l'angle ECD=BAE [corol. 2. prop. 3.], et par conséquent l'angle BAE+BCE=[l'angle BCD] sera moindre que BCD+DCF, c'est-à-dire moindre que deux angles droits [corol. 6.]

COROLLAIRE.

Si deux angles intérieurs du même côté, contigus à la sécante, sont égaux à deux droits, les côtés du trilatère ne sauroient se rencontrer : car autrement on pourroit répéter la construction précédente, et trouver l'angle BCD=BCD+DCF, ce qui seroit absurde.

PROPOSITION.

VII. Deux droites sont parallèles, lorsqu'étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge. Fig. 7.

Soient GO,RS ces droites. Si elles ne sont point parallèles, prenons un point quelconque A sur GO, et concevons AP parallèle au côté RS [demande 3.]; Donc GO qui coupe AP en A, devra couper aussi l'autre côté RS. [déf. 19.] ; ce qui est impossible : [sup.] donc GO,RS sont parallèles.

COROLLAIRE

Si les deux angles intérieurs du même côté de la sécante sont égaux à la somme de deux droits, les côtés du trilatère seront parallèles ; car ils ne sauroient se rencontrer [corol. préced.], et par conséquent ils seront parallèles [prop. 7.].

PROPOSITION.

Fig. 6. VIII. Deux droites parallèles ne sauroient se rencontrer.

Si elles peuvent se rencontrer soit GB,BF parallèles, et AC une sécante. Revenant à la construction de la proposition VI, on aura les deux angles GAC,ACD égaux à la somme de deux droits ; d'où il suit que les deux lignes CD,GB ne sauroient se rencontrer [corol. prop. 6.] ; mais pour que GB,FB soient parallèles, il faut que CD les coupe toutes deux [déf. 19.] ; donc deux droites parallèles ne sauroient se rencontrer.

COROLLAIRE.

Fig. 7. Soient OG,RS deux parallèles, et OS la sécante : je dis que dans quelque point A qu'une droite infinie AP rencontre AG, cette droite rencontrera RS. Car tirant par le point A une droite quelconque AM, si AP ne rencontre pas RS, les droites AP,RS seront parallèles par rapport à la sécante AM [prop. 7.] ; donc GO, qui coupe AP, coupera aussi RS [déf. 19.] contre ce que l'on vient de démontrer ; donc AP rencontrera RS.

PROPOSITION.

IX. Deux droites parallèles coupées par une troisième font les deux angles intérieurs du même côté égaux à deux droits. Fig. 7.

Soient AG,RS deux parallèles coupées par la droite AM : je dis que GAM+AMR=deux angles droits ; car autrement on pourra tirer la droite PA, de sorte que les deux angles PAM+AMR soient égaux à deux droits : donc PA,RS seront parallèles [corol. prop. 7.], et par conséquent GA rencontrera RS [déf. 19.] ; mais cela est impossible [sup. et prop. 8.] ; donc GAM+AMR= deux droits.

COROLLAIRE.

Les côtés d'un trilatère peuvent toujours se rencontrer, lorsque les angles intérieurs du même côté de la sécante font une somme moindre que deux angles droits (*g*).

SCHOLIE.

Lorsque GO,RS sont parallèles coupées par une troisième droite, il est facile de conclure des propositions précédentes que les angles *alternes internes*, ainsi que les *externes alternes* sont égaux ; c'est-à-dire GAM=AMS,RMA=MAO ; et GAV=TMS,VAO=RMT ; etc. etc. Fig. 7.

NOTES

Sur les définitions précédentes.

I.

(*a*) Je nomme théorie exacte, ou simplement théorie, une suite de propositions dont la seconde dérive de la première, la troisième de la seconde, et ainsi de suite.

La première doit être un axiome ou une hypothèse selon que la théorie roule sur un objet réel, ou de convention.

On l'appelle définition, lorsqu'on s'en sert pour fixer le signe ou le nom qui doit représenter l'objet de la théorie. On peut donc dire que la définition fondamentale d'une théorie quelconque n'est qu'une première équation qui en détermine l'objet.

L'expérience fait voir qu'il y a des définitions qui embrassent effectivement toutes les propriétés de leurs objets, et qu'en pareil cas, elles réunissent toujours ce qu'on appelle, *genre prochain*, et *différence prochaine* de l'objet.

La définition convertie en *demande* doit toujours indiquer la possibilité de l'objet. La demande n'est donc qu'un problème dont la solution est possible par expérience, indépendamment de toute démonstration proprement dite.

Je n'ignore point que ces principes tiennent à des règles de l'ancienne école, qui ne sont pas du goût de tous les idéologistes modernes : on les laisse tomber en dessuétude, apparemment parce qu'on n'a jamais expliqué par des exemples assez précis la manière de s'y conformer. Mais il me semble que dans des discussions du genre de celles dont nous allons nous occuper, on ne devroit jamais s'en départir ; du moins jusqu'à ce que ces mêmes idéologistes nous prouvent d'une manière incontestable, que les résultats en sont faux, ou tout-à-fait inutiles.

Un autre principe non moins important, qui suit ceux-là et en confirme l'utilité, c'est que tout synonyme dans le langage scientifique décèle nécessairement de la confusion dans les idées ; car la théorie d'un même objet ne sauroit avoir plus d'une base. Je dis la même chose de toute définition superflue, comme, par exemple, d'un mot dont la signification n'est pas incertaine, et qui ne désigne l'objet d'aucune théorie proprement dite. Ces définitions sont rarement exactes ; il faut les abandonner aux auteurs de vocabulaires : en théorie elles ne servent qu'à engendrer des disputes. En voici des exemples :

1. La ligne est plus ou moins longue ; le corps plus ou moins épais ; la surface plus ou moins large, selon que ces objets sont plus ou moins grands que ceux auxquels on les compare. De là les noms abstraits de longueur, largeur et épaisseur, que l'on ne sauroit définir géométriquement, à moins qu'on ne les rende synonimes de ligne, de surface et de corps. Au reste, ces noms vulgaires n'abrègent aucun énoncé : on feroit donc mieux de s'en passer.

2. La géométrie, dit-on, est une science *qui a pour objet la mesure de l'étendue* : la géométrie est une science ; voilà le genre : elle a pour objet la mesure de l'étendue : ce seroit là l'espèce, si elle étoit bien déterminée, et si la géométrie n'avoit pour objet que la mesure de l'étendue. Quoiqu'il en soit, puisque le nom de géométrie n'est pas incertain, et que sa définition ne sert de base à aucune démonstration, on feroit beaucoup mieux de ne pas en parler du tout, ou de la placer à la fin de la géométrie : au commencement elle n'est bonne qu'à habituer les enfans à répéter par cœur ce qu'ils ne sauroient entendre.

Corps ou solide est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue : cette définition est évidemment vicieuse ; car les idées de mesure, dimension, étendue, sont postérieures à celle de corps ; aussi revient-elle au même que celle-ci : corps ou solide est ce qui réunit les trois dimensions du corps ou du solide. J'ai donc pensé qu'il vaudroit peut-être mieux convertir en définition l'axiome vulgaire : *tout corps est divisible à l'infini* ; *mais ce qui le distingue de tous les objets divisibles à l'infini, c'est que les parties en sont mobiles et incompénétrables.* La première propriété marque le genre ; la seconde détermine l'espèce. J'avouerai cependant que ce n'est pas sans quelque méfiance que je hasarde cette définition ; car les idées de mobilité et d'incompénétrabilité ne sont pas plus déterminées que celles de corps, quand même elles en seroient indépendantes : ce qui ne me paroît pas. Mais en prenant ce mot dans son acception propre et naturelle, l'on conviendra que les définitions 2, 3 et 5, qui tiennent

à la première, sont exactes. Rapprochons-les de celles, par exemple, de M. Legendre, et nous verrons qu'elles prêtent beaucoup moins à la dispute.

« *L'étendue*, dit M. Legendre, *a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur* (déf. 1.) *La ligne est une longueur sans largeur : les extrémités d'une ligne s'appellent points.* (déf. 2.) *Surface est ce qui a largeur, sans hauteur ou épaisseur.* (déf. 5.) *Solide ou corps est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue.* (déf. 7.)

Or, on peut demander 1.° si la signification de corps est plus incertaine que celles d'étendue, de longueur, de largeur, et de hauteur ou épaisseur ; et si les idées qui répondent à ces derniers mots, sont indépendantes de celle de corps ? (c'est ce que je ne crois pas). 2.° Si les noms d'étendue et de corps sont synonimes, et s'il y a des cas où l'attribut et le sujet ne sont qu'une seule et même chose ? car, selon M. Legendre, l'étendue a trois dimensions : longueur, largeur, et hauteur ; et le corps réunit les trois dimensions de l'étendue. 3.° La ligne est-elle une étendue ? il faut répondre que non, puisqu'elle n'en a que la longueur ; d'où il résulteroit qu'en géométrie, on ne s'occupe pas toujours de l'étendue. Le point n'en a aucune ; ce qui est bien pis : et cependant les points sont les extrémités de la longueur sans être rien. Les extrémités sont-elles homogènes ou hétérogènes à l'objet dont elles font partie ? sont-elles dans l'objet, ou hors de l'objet ? 4.° Point est ce qui n'a pas d'étendue : donc tout ce qui n'a pas d'étendue seroit un point.

Analysons maintenant les définitions que je subs-

titue à la place de celles-ci, et on verra que non-seulement elles ne prêtent à aucune difficulté raisonnable, mais qu'elles sont parfaitement en règle.

Le point est une grandeur (genre éloigné), de l'espèce *corps* (genre prochain), que l'on peut réputer nul et indivisible (différence prochaine). On donne, par exemple, le nom de point à une petite marque sur une feuille de papier, par rapport à un trait de plume; au sommet d'une montagne par rapport à la montagne; au globe terrestre par rapport à la sphère céleste, etc. etc. Le trait de plume, une chaîne de montagnes, une rivière, etc. sont des lignes par rapport aux corps qui en sont les extrémités. La partie visible d'un corps quelconque en est la surface.

On s'imaginera peut-être, qu'en admettant des définitions de cette espèce, on dégraderoit la géométrie en la rendant une science d'un raisonnement moins pur qu'elle ne l'est actuellement. Mais en seroit-elle moins vraie et moins utile? n'est-ce pas des idées concrètes que l'on passe aux idées abstraites? La géométrie n'est, selon Newton, qu'une partie de la physique: on ne sauroit donc trop la dégager de toute métaphysique suspecte; je veux dire, superflue.

Dans ce cas, dira-t-on encore, il faudra changer aussi les propositions de géométrie, en disant, par exemple, que l'on ne peut faire une droite, un triangle, un cercle, etc., que par approximation; que les trois angles d'un triangle ne sont égaux à deux droits, qu'à peu près; et ainsi du reste. Eh! quel mal s'ensuivroit-il? n'est-ce pas là ce que l'on peut faire, ou observer sur le terrein? Au surplus, on sera toujours

à

à temps de dire aux commençans : Faites abstraction de toute inégalité des points, des lignes, des surfaces, des instrumens dont vous vous servirez, en un mot, de toute erreur mécanique, et vous pourrez affirmer, que les trois angles d'un triangle sont parfaitement égaux à deux droits ; et ainsi du reste.

II.

(*b*) « La ligne droite est celle qui est toute également » placée entre ses points » : définition de la classe qu'on appelle *idem per idem*. On a substitué à celle-ci que « la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre » ; ce qui ne paroît pas plus exact : car le plus-court chemin étant comparatif, on peut demander quel en est le positif ? Ce ne peut être que le *long chemin*, expression infinie qui désigne tous les chemins possibles. Insistons donc sur les règles.

Un rayon de lumière, une corde tendue etc., sont des lignes qu'on appelle droites. Or, pourquoi leur a-t-on donné ce nom ? Quelle est la différence que l'on a observé entre celles-ci et les autres lignes qui ne sont point droites ? Est-ce en isolant les unes et les autres, ou bien en les comparant entr'elles, que l'on est parvenu à établir leur différence spécifique ? La définition 4.me satisfait à ces questions.

Deux rayons de lumière, deux cordes tendues etc., ne renferment point d'espace lorsqu'elles se touchent à leurs extrémités ; voilà ce qui les distingue dans le genre *ligne* ; et voilà l'axiome dont l'artiste se sert pour en fabriquer de droites. Or, cet attribut renferme celui du plus court chemin ; donc la déf. 4.me est exacte.

III.

(c) D'où vient que dans la théorie des parallèles l'on souffre à regret l'axiome 11.me d'Euclide, tandis que dans la théorie des courbes on murmure à peine contre l'impossibilité de démontrer celui d'Archimède? L'un seroit-il moins axiome que l'autre, ou l'autorité d'Euclide seroit-elle inférieure à celle d'Archimède ? Voici, à ce qu'il me paroît, la raison de cette partialité. Quand on établit que « toute ligne qui n'est ni » droite, ni composée de lignes droites est une ligne courbe, » on n'est pas plus avancé que si l'on disoit, par exemple, qu'un triangle *n'est ni cercle ni composé de cercles* ; on n'établit rien de positif sur la nature de l'objet, sur la qualité qui le distingue de l'espèce qui n'est point *courbe* : d'où il résulte que dans la théorie des courbes, en laissant de côté une définition illusoire qui n'y influe en rien, et en se tenant à l'idée acquise immédiatement avec le secours des yeux, on est porté, comme par instinct, et sans s'en appercevoir, à convertir en définition de courbe l'axiome d'Archimède ; ce qui effectivement rend la théorie exacte. Mais dans la théorie des parallèles, cette conversion tacite, cette espèce de *qui-pro-quo* devient pour ainsi dire impossible. La définition est là ; il faut en tenir compte. Quoique non moins stérile que celle de courbe, comme je le ferai voir dans la note suivante, elle a cependant trop d'apparence pour échapper à l'attention la plus médiocre ; il faut qu'elle figure dans la même page, dans le même discours avec l'axiome respectif : de là les controverses.

Cela posé, il me paroît que ma définition de courbe

ne devroit souffrir aucune difficulté : je ne fais qu'y établir, selon les règles, ce que tout le monde fait sans s'en douter : je réduis en définition de courbe l'axiome respectif, tout comme Euclide auroit converti en définition de cercle l'axiome suivant : *parmi toutes les lignes qui ne sont ni droites, ni composées de droites, il y en a qui renferment un espace fini, et qui ont des centres également éloignés de tous leurs points.* Voyons maintenant si ma définition est en règle. Partageons le genre ligne en deux espèces, droites et courbes : les premières sont toujours égales lorsqu'elles ont les mêmes extrémités ; les secondes ne le sont pas toujours. On pourroit donc dire : lignes courbes sont celles qui ne sont pas toujours égales lorsqu'elles ont les mêmes extrémités. Mais cette définition auroit le même inconvénient que la définition vulgaire : elle n'affirmeroit rien de positif sur son objet. Il faut donc dire dans quelles circonstances on peut observer que les lignes désignées par le nom de courbes sont toujours inégales, c'est-à-dire, les unes plus grandes que les autres. Voilà ce qui achève de me persuader que ma définition est exacte.

On m'objectera, sans doute, que la proposition d'Archimède se trouve démontrée dans la géométrie de M. Legendre, et que par conséquent ma définition est inadmissible autant que contraire aux règles même dont je prétends l'appuyer. Mais, ou je n'entends pas la démonstration de M. Legendre, ce qui ne seroit pas un miracle, ou elle est défectueuse. L'auteur y suppose « que si une ligne n'est pas plus petite » que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi » ces dernières une ligne plus courte que toutes les

» autres, laquelle ne sera pas plus grande que l'enveloppée » : proposition que la définition vulgaire de courbe, adoptée par M. Legendre, ne sauroit renfermer ; et la preuve en est, que la démonstration de M. Legendre ne dépend en aucune manière de sa définition de courbe. Il me paroît donc très-possible qu'il y ait dans la démonstration de M. Legendre ce qu'on appelle *petitio principii*.

M. Peyrard dit que « si Archimède n'a pas demontré son axiome, qui n'est point évident par lui-même, » c'est parce qu'il est impossible de le démontrer d'une » manière satisfaisante. C'est sans doute à cause de ce » défaut d'évidence de cette proposition, et à cause de » l'impossibilité de la démontrer rigoureusement, » qu'Euclide n'a point fait usage de cette proposition, » sans laquelle il lui a été impossible de démontrer » plusieurs théorèmes importans concernant le cercle, » le cylindre » etc. etc. (pag. 453.)

Mais, selon ce qui vient d'être dit, il me paroît bien plus probable que si Archimède a laissé sa proposition sans démonstration, c'est parce qu'il savoit que tout raisonnement exact sur un objet quelconque doit s'appuyer sur quelque propriété positive de ce même objet, soit sous le nom de définition, soit sous celui d'axiome, ou d'hypothèse, indépendante de toute démonstration rigoureuse, ou non rigoureuse. D'ailleurs je ne crois pas qu'il y ait sur des objets réels un axiome plus évident par lui-même que celui d'Archimède : un enfant, pour ne point dire un animal quelconque, rencontre-t-il un obstacle ; qu'est-ce qu'il fait pour le dépasser plus vite ? Il ne s'en détourne qu'au-

tant qu'il lui faut pour ne point y toucher ; d'où il suit que l'axiome d'Archimède est évident, même pour les enfans.

Ce n'est donc pas non plus à cause du défaut d'évidence qu'Euclide n'a point fait usage de cette proposition ; lui qui comptoit l'inverse de la 17.me de son premier livre au nombre des axiomes, pouvoit-il être si scrupuleux sur l'évidence de celui d'Archimède ? D'ailleurs on n'a qu'à considérer un moment la sagacité avec laquelle il parvint à démontrer la proposition sur les sphères concentriques, pour se convaincre qu'Euclide savoit sur les courbes plus que l'axiome d'Archimède.

IV.

(*d*) « Lorsque deux lignes se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées » l'une de l'autre, quant à leur position, s'appelle » angle » [Géom. de M. Læg. déf. 9]. Mais, quelle est cette quantité ? Est-ce une ligne, ou un nombre abstrait ? C'est une quantité quant à la position. Mais cette quantité, quant à la position, est-elle une étendue finie ou infinie ? et quelles sont les dimensions de cette étendue ? Car il ne faut pas perdre de vue, que *la géométrie n'a pour objet que la mesure de l'étendue.*

La définition d'Euclide n'est pas plus exacte. « Un » angle plan est l'inclinaison mutuelle ou l'ouverture » de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui » ne sont pas placées dans la même direction. » D'où l'on pourroit conclure, que la somme de deux angles droits est égale à rien ; ce qui est contraire à l'axiome : que le tout est homogène à ses parties. Cependant on peut dire, que le défaut de cette définition est pres-

5...

qu'insensible dans les Elémens d'Euclide, par cela seul qu'il n'y est jamais question que de figures finies, selon la définition 20, livre I.er ; et que l'angle rectiligne n'entre dans cette espèce, qu'autant qu'il est moindre que deux droits ; parce que ce n'est qu'alors, qu'il devient fini dans les figures dont il fait partie. Mais, dans l'état actuel de la science, cette définition est insuffisante : parmi les figures géométriques, on en considère plusieurs d'infinies ; et l'analyse trigonométrique ne roule pas toujours sur des ouvertures. Supposons dans un cercle un rayon fixe, et un autre mobile, parcourant 360° par heure. Si, au bout d'un certain temps, on demande l'angle qu'ils forment entr'eux, à compter d'un instant de coïncidence, il faudra répondre, selon notre définition : que cet angle est de 360° au bout d'une heure ; de 540° au bout d'une heure et demie, etc., etc. En effet, en pareils cas, le nom d'angle pris pour synonime de ceux d'ouverture, d'inclinaison et de position, seroit détourné de sa signification propre et naturelle.

V.

(e) « Deux lignes sont dites parallèles lorsqu'étant » situées dans le même plan, elles ne peuvent se ren» contrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une » et l'autre ». Cette définition revient au même que celle-ci : *Toute figure plane et rectiligne, à deux côtés infinis, est dite parallèle, lorsqu'elle n'est ni angle ni composée d'angles.* Définition aussi stérile que celle de ligne courbe, dont nous avons fait voir plus haut la nullité.

Or, il est bon d'observer que dans la définition

vulgaire de ligne courbe, on ne considère l'objet qu'isolément, sans le comparer à d'autres objets de la même ou de différente espèce ; tandis que dans la théorie respective on ne fait que comparer les courbes tantôt entr'elles, tantôt avec des lignes droites. De même dans la définition vulgaire de parallèles on exclut toute idée d'angle, tandis que, dans les propositions concernant les parallèles, il n'est jamais question que d'angles rectilignes ; donc les objets de ces deux définitions ne sont pas ceux de leurs théories respectives. Et voilà, je pense, le vrai nœud de la dispute, tant sur l'axiome d'Euclide, que sur celui d'Archimède. Je ne crains pas même d'affirmer que telle est l'origine de plusieurs autres contestations d'autant plus conséquentes qu'elles ne roulent pas toujours sur des parallèles. Rien ne me seroit si facile que de le prouver par des exemples : mais ce seroit trop m'écarter de mon sujet. Il me suffira d'arrêter un instant l'attention du lecteur sur la nouvelle définition des parallèles que je propose (déf. 19.)

On *sent* que l'on peut toujours joindre par une droite le point que l'on *observe* dans une autre droite ; mais il faut *raisonner* pour concevoir deux droites qui ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge dans le même plan : donc cette seconde idée ne sauroit être convertie en définition exacte (règle 4e).

Trois droites infinies et situées dans un plan peuvent être combinées de trois manières différentes : ou elles se rencontrent toutes trois ; ou il n'y en a qu'une qui rencontre les deux autres ; ou elles ne se rencontrent en aucune manière. Nommons la

première espèce *figure triangulaire* ; la seconde *triangulaire*, et la dernière *multangulaire*. La possibilité de la première n'est due qu'à l'observation ; celle de la seconde peut-elle nous venir d'une autre origine ? C'est ce que je ne crois pas. Il me paroît, au contraire, que si la possibilité de l'une pouvoit se déduire de celle de l'autre par le raisonnement, les deux espèces ne feroient alors qu'une seule et même espèce, ce qui est impossible.

VI.

(*f*) S'il est vrai, comme je le pense, que toute théorie exacte part d'un principe, soit d'expérience, soit de convention, n'est-ce pas une incohérence que de ne point ramener à un semblable point de départ toute autre théorie moins exacte, ou qui donne de la prise sur elle ? On m'objectera sans doute que ma demande 3.me n'est que l'axiome 11.e du 1.er livre d'Euclide, travesti d'abord en définition, et ensuite en demande : mais je ne sache pas que cet axiome puisse être autre chose, sur-tout en le dégageant, comme je le fais, de toute considération d'angle droit ; car ce n'est que cette complication d'idées qui le sépare effectivement, et l'a fait exclure peut être du nombre des demandes du 1.er livre d'Euclide, où il se trouve placé dans quelques manuscrits.

Fig. 8. Soit CD une droite indéfinie, A un point quelconque, AC, AD deux rayons de cercles aussi grands qu'on pourra les prendre par rapport à la distance du point A ; Soit GAH une droite tirée par le sommet, et entre les côtés des angles verticalement opposés à RAD, CAC. L'expérience prouve que ces angles deviennent d'autant plus *imperceptibles* que le rayon AD est plus grand

par rapport à la distance du point A à la droite CD, de sorte que AC, AD paroissent se confondre avec une seule et même droite. On peut en convaincre les commençans, soit sur le papier, soit sur le terrein, avec une règle ou une corde; tout comme on leur prouve, par les mêmes moyens, que l'on peut faire un cercle, ou une ligne droite, sans erreur considérable. Donc toute droite qui au point A fera avec la droite GH un angle donné, et par conséquent perceptible, coupera à-la-fois GH et CD. Or, le point A demeurant fixe, on *sent* que l'on auroit pu prendre le double, le triple etc. de chaque droite AC, AD, sans que ces droites cessent de couper à-la-fois CD, GH; donc la 3.me demande est aussi permise que la 3.me d'Euclide. Je n'y trouve d'autre différence, si non que l'idée de cercle nous est plus familière que celle de l'objet de la demande 3.me.

On peut s'en convaincre encore d'une manière plus simple: supposons l'angle rectiligne GAC aussi petit qu'on pourra l'imaginer, et mobile autour du point donné A, toujours sur le même plan. Il est clair qu'à l'instant où AG cessera de rencontrer DC, le second côté AC rencontrera encore la même droite DC. Or, en s'arrêtant à cet instant et à cette position, il s'en suit que toutes les droites qui au point A feront avec AG des angles non moindres que GAC, rencontreront nécessairement DC.

VII.

(*g*) Le corollaire de la proposition 9.me, qui n'est que l'axiome 11.me d'Euclide, se trouve aussi sous la forme de théorème dans la géométrie de M. Legendre.

Mais la théorie de M. Legendre ne me paroît pas à l'abri de toute contestation.

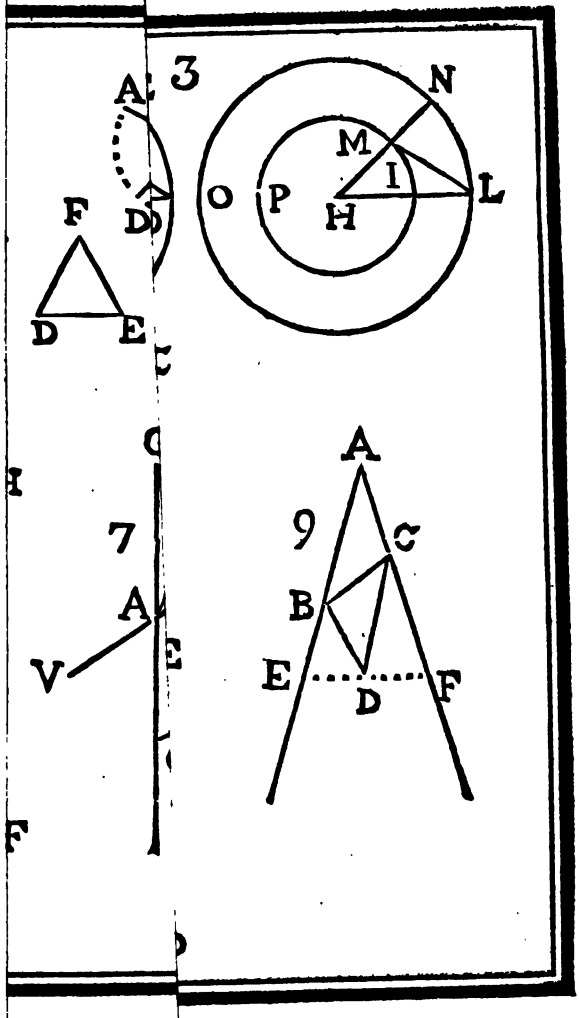
Fig. 9. Soient AB,AC deux droites infinies ; BA=DC ; CA=BD ; R= deux angles droits ; $A > \frac{1}{3}R$, et z un angle variable, décroissant jusqu'à *zéro*. Pour démontrer l'impossibilité de l'équation, $A+B+C=R-Z$, M. Legendre suppose (prop. 20. liv. 1.er) qu'une droite EF tirée par le point D peut toujours rencontrer à-la-fois les deux côtés de l'angle A, principe constant et indubitable, mais dont l'évidence me paroît, s'il est permis de s'exprimer ainsi, variable et décroissante jusqu'à *zéro* dans l'application que M. Legendre en fait à sa démonstration ; car on peut se figurer que les sommes $B+C$, $E+F$ décroissent sans cesse, et que les angles E, F peuvent devenir nuls, soit successivement, soit à-la-fois ; d'où il résulte que l'évidence de l'axiome de M. Legendre n'est pas la même depuis le commencement jusqu'à la fin de sa démonstration.

Cependant, puisque nous sommes convenus, pag. 21, de ne point disputer sur l'évidence d'aucune proposition concernant les parallèles, supposons que celle de l'axiome de M. Legendre demeure constante pendant tout le cours de sa démonstration. Toujours il est vrai de dire que la théorie de M. Legendre dépend d'un principe qui n'est compris dans aucune de ses définitions, et que par conséquent elle est contraire à la règle de Descartes, page 22 ; donc M. Legendre lui-même sera le premier à se méfier plutôt de sa propre théorie que d'une règle si importante, et dont personne n'a jamais démontré la fausseté ni les inconvéniens, tant qu'il ne s'agit que de méthode de

déduction, selon Euclide : je dis selon Euclide, pour parer d'avance à toute objection idéologique. D'ailleurs, que l'on se donne la peine de réduire la théorie de M. Legendre à la forme de la mienne, en rapprochant son axiome auxiliaire de ceux dont il est question dans les notes précédentes, et on verra qu'ils reviennent absolument au même. Voici quelles seroient alors la définition et la demande fondamentales de la théorie de M. Legendre. — Définition : *angle rectiligne est la figure infinie que deux droites forment en aboutissant à un seul point, pourvu que cette figure puisse devenir finie moyennant une troisième droite mobile autour d'un point quelconque pris entre les côtés de la figure et sur un même plan.* — Demande : *Par un point donné entre les côtés d'un angle rectiligne, et sur le même plan, conduire une droite qui rencontre à-la-fois les deux côtés de l'angle, du moins dans les cas où il ne sera pas plus grand que le tiers de deux angles droits.* D'où l'on voit que ces deux principes ne sont pas plus admissibles que les miens. (déf. 19 et demande 3.°) Or, la théorie que j'y ai fondée est d'autant plus simple qu'elle ne diffère de celle d'Euclide que par la forme ; donc la mienne est préférable ; car en fait de méthode, moins on s'écarte d'Euclide, moins on risque de se tromper. Il seroit même à souhaiter qu'elle fût exacte ; car on en pourroit conclure : 1.° que la règle de Descartes est générale, du moins en mathématique ; 2.° que toute théorie exacte ne doit contenir que des définitions et des théorèmes, et jamais des axiomes ; 3.° que lorsque une théorie quelconque donne de la prise sur elle à cause de quelque proposition qui échappe

à toute démonstration méthodique, le seul moyen d'y remédier, c'est d'insérer dans la définition fondamentale (dont il faut commencer par se méfier) la proposition même qui en est le principe auxiliaire, pourvu que ce principe ne soit que d'expérience ou de simple convention. On verra plus d'un exemple de cette dernière espèce dans un autre petit ouvrage que je compte de publier bientôt. Telle me paroît la vraie solution du problème que je me suis proposé plus haut, page 22. Il se peut cependant que cette solution ne soit qu'illusoire, par cela même qu'elle est si facile et si commode : mais on conviendra du moins que nous nous sommes occupés d'une question digne de l'attention des géomètres, et qui nécessite de leur part une décision catégorique. Car s'ils ont acquis aux sciences dont ils s'occupent le renom d'exactes, ce n'est, à ce que je crois, que par la réputation dont ils jouissent de partir, ou de pouvoir toujours partir de définitions complètes, c'est-à-dire conformes à la règle de Descartes : or, si en rejettant la solution que je propose, ainsi que l'investigation qui m'y a conduit, ils décident qu'il y a en effet dans les mathématiques pures des branches opposées à cette règle, il faudra qu'ils avouent en même-temps que les mathématiques pures ne sont pas toujours exactes ; qu'elles ne le sont qu'en prenant la partie pour le tout.

FIN.


3
A
F
D
D
E
N
M
I
O
P
H
L
7
A
V
9
A
C
B
E
D
F

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.